概率论与数理统计

主讲教师：朱丽娜　讲师

研究方向：智能交通，车联网与智能驾驶

电子邮件：lnzhu@xidian.edu.cn

个人主页：http://web.xidian.edu.cn/lnzhu/

第七章 参数估计

- § 7.1 点估计
- § 7.2 基于截尾样本的最大似然估计
- § 7.3 估计量的评选标准
- § 7.4 区间估计
- § 7.5 正态总体均值和方差的区间估计
- § 7.6 (0－1)分布参数的区间估计
- § 7.7 单侧置信区间

第七章 参数估计

- § 7.1 点估计
- § 7.2 基于截尾样本的最大似然估计
- § 7.3 估计量的评选标准
- § 7.4 区间估计
- § 7.5 正态总体均值和方差的区间估计
- § 7.6 (0－1)分布参数的区间估计
- § 7.7 单侧置信区间

§7.3 估计量的评选标准

- 由点估计的两种典型求估计量的方法可知，同一参数用不同的估计方法，求出的估计量可能不同
- 比如θ可以是前k阶样本矩的函数（假设有k个待估参数），也可以是样本似然函数的极点或在取值范围内的最值点
  - 如均匀分布中关于区间两个端点的矩估计量和最大似然估计量就不同
- 尽管原则上，任何统计量都可以作估计量，但总有好坏之分，希望在合理的标准下选择最理想的估计量
  - 本节学习三个常用的评选标准:
  - 无偏性，有效性，相合性(一致性)

§7.3 估计量的评选标准

- 1° 无偏性——数学期望评选标准
- 意义：估计量是随机变量，其所取估计值应以待估参数真值为中心摆动，并且大量估计值的统计平均值应该稳定于参数真值，也就是估计量的数学期望应该等于参数真值
- 设$X_1,X_2,\ldots,X_n$是总体X的一个样本，$\theta\in\Theta$是包含在总体X的分布中的待估参数，这里Θ是θ的取值范围。

无偏性：若估计量 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\ldots,X_n)$的数学期望$E(\hat{\theta})$存在，且对于任意的$\theta\in\Theta$有$E(\hat{\theta})=\theta$，则称$\hat{\theta}$是$\theta$的无偏估计量。即 $E(\hat{\theta})-\theta=0$，

- 称$E(\hat{\theta})-\theta$为以$\hat{\theta}$作为θ的估计的系统误差，那么无偏估计的实际意义就是无系统误差（人为的或系统本身原因导致的误差，而不是测量误差）

§7.3 估计量的评选标准

关于常用统计量的一些结论

1. k阶样本矩是总体k阶矩的无偏估计

设总体 X 的k阶矩$\mu_k = E(X^k)\ (k \geq 1)$存在，又设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 X 的一个样本，试证明不 论总体服从什么分布，k阶样本矩 $A_k = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ 是k阶总体矩 μ_k的无偏估计.

证　因为$X_1, X_2, \cdots, X_n$与X同分布，

故有　$E(X_i^k) = E(X^k) = \mu_k$，　$i = 1,2,\cdots,n.$

§7.3 估计量的评选标准

即 $$E(A_k)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^k)=\mu_k.$$

故 k 阶样本矩 A_k 是 k 阶总体矩 μ_k 的无偏估计.

特别地:

不论总体 X 服从什么分布,

只要它的数学期望存在,

$\overline{X}$ 总是总体 X 的数学期望 $\mu_1=E(X)$ 的无偏估计量.

§ 7.3 估计量的评选标准

2. 样本方差是总体方差的无偏估计，二阶中心距不是无偏估计

对于均值 μ，方差 $\sigma^2 > 0$ 都存在的总体，若 μ，σ^2 均为未知，则 σ^2 的估计量 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ 是有偏的(即不是无偏估计).

证 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \overline{X}^2 = A_2 - \overline{X}^2$,

因为 $E(A_2) = \mu_2 = \sigma^2 + \mu^2$,

又因为 $E(\overline{X}^2) = D(\overline{X}) + [E(\overline{X})]^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$,

所以 $E(\hat{\sigma}^2) = E(A_2 - \overline{X}^2) = E(A_2) - E(\overline{X}^2)$

§ 7.3 估计量的评选标准

$$=\frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2,$$ 所以 $\hat{\sigma}^2$ 是有偏的.

若以 $\dfrac{n}{n-1}$ 乘 $\hat{\sigma}^2$,所得到的估计量就是无 偏的.

(这种方法称为**无偏化**).

$$E\left(\frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2\right)=\frac{n}{n-1}E(\hat{\sigma}^2)=\sigma^2.$$

因为 $\dfrac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2 = S_n^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}^2)$,

即 S^2是σ^2 的无偏估计，故通常取S^2作σ^2的估计量.

§ 7.3 估计量的评选标准

例1 设总体 X 在 $[0,\theta]$上服从均匀分布,参数 $\theta > 0$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，试证明 $2\overline{X}$ 和 $\dfrac{n+1}{n}\max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 都是 θ 的无偏估计.

证 因为 $E(2\overline{X}) = 2E(\overline{X}) = 2E(X) = 2 \times \dfrac{\theta}{2} = \theta,$

所以 $2\overline{X}$ 是 θ 的无偏估计量.

因为 $X_{(n)} = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0 \le x \le \theta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

§7.3 估计量的评选标准

所以 $E(X_{(n)}) = \int_0^\theta \frac{nx^n}{\theta^n} dx$

$$= \frac{n}{n+1}\theta,$$

故有 $E\left(\frac{n+1}{n} X_{(n)}\right) = \theta,$

故 $\frac{n+1}{n}\max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 也是 θ 的无偏估计量.

例2 设总体 X 服从参数为 θ的指数分布，概率密度 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & 其它\end{cases}$，其中参数 $\theta>0$，又设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，试证 $\overline{X}$ 和 $nX_{(1)}=n[\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)]$ 都是θ的无偏估计.

证 因为 $E(\overline{X})=E(X)=\theta$,

所以 $\overline{X}$ 是θ的无偏估计量.

§ 7.3 估计量的评选标准

而 $X_{(1)}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 服从参数为 $\dfrac{\theta}{n}$ 的指数分布，

概率密度 $f_{\min}(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{n}{\theta}e^{-\frac{nx}{\theta}}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

故知 $E(X_{(1)})=\dfrac{\theta}{n}$， $E(nX_{(1)})=\theta$，

所以 $nX_{(1)}$ 也是 θ 的无偏估计量.

由上可见,同一个参数可以有不同的无偏估计量.

无偏性是评价估计量的一个重要标准,而且在许多场合是合理的, 必要的。然而，有时一个参数的无偏估计可能不存在

§7.3 估计量的评选标准

2° 有效性———方差评选标准（分散度）

- 评选的前提是估计量首先是无偏的

➲ 意义：待估参数可能有多个无偏估计量，但也有优劣之分。对于两个无偏估计量 $\hat{\theta}_1$和 $\hat{\theta}_2$，在样本容量n相同的条件下，哪一个估计量的观察值更密集在真值θ附近，认为哪一个更为理想。估计值与真值具有较大偏差的概率就更小些。

➲ 由于方差是随机变量取值与其数学期望的偏离程度的度量，这样在无偏的情况下 $E(\hat{\theta}_1)=E(\hat{\theta}_2)=\theta$ 以方差小者为好，即估计量的有效性

§ 7.3 估计量的评选标准

有效性 设 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 与$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n$都是$\theta$的无偏估计量，若对于任意$\theta\in\Theta$，有 $D(\hat{\theta}_1)\le D(\hat{\theta}_2)$ 且至少对于某一个$\theta\in\Theta$，上式中的不等号成立，则称 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$有效。

如例2中的两个无偏估计量

由于 $D(X)=\theta^2$， 故有 $D(\overline{X})=\dfrac{\theta^2}{n}$,

又因为 $D(X_{(1)})=\dfrac{\theta^2}{n^2}$，故有 $D(nX_{(1)})=\theta^2$,

当$n>1$时，$D(nX_{(1)})>D(\overline{X})$,

故 θ 的无偏估计量 $\overline{\mathrm{X}}$ 较 $nX_{(1)}$有效.

§ 7.3 估计量的评选标准

例3 (续例1)在例1中已证明 $\hat{\theta}_1 = 2\overline{X}$和

$$\hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n}\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$$都是 θ 的无偏

估计量，试证当 $n \geq 2$时，$\hat{\theta}_2$较 $\hat{\theta}_1$ 有效.

证明 由于 $D(\hat{\theta}_1) = 4D(\overline{X}) = \frac{4}{n}D(X) = \frac{4}{n}\frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n}$,

$$D(\hat{\theta}_2) = D\left(\frac{n+1}{n}X_{(n)}\right) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 D\left(X_{(n)}\right),$$

又因为 $E(X_{(n)}) = \frac{n}{n+1}\theta$,

$$E(X_{(n)}^{\ 2})=\int_0^\theta \frac{n}{\theta^n}x^{n+1}dx=\frac{n}{n+2}\theta^2,$$

$$D(X_{(n)})=E(X_{(n)}^{\ 2})-[E(X_{(n)})]^2$$

$$=\frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2,$$

故 $D(\hat{\theta}_2)=(\frac{n+1}{n})^2 D(X_{(n)})=\frac{1}{n(n+2)}\theta^2,$

又$n\geq 2$, 所以 $D(\hat{\theta}_2)<D(\hat{\theta}_1)$, $\hat{\theta}_2$较$\hat{\theta}_1$有效.

§7.3 估计量的评选标准

定义

如果存在θ的一个无偏估计量 $\hat{\theta}_0$,使得对于θ的任意无偏估计量 $\hat{\theta}$,都有

$$D(\hat{\theta}_0) \le D(\hat{\theta})$$

则称$\hat{\theta}_0$是θ的最小方差无偏估计 (量),缩写为 $MVUE$.

说明:最小方差无偏估计是一种最优估计.

§7.3 估计量的评选标准

- 3° 相合性———样本容量极限评选标准
  - 在样本n固定情况下，无偏性和有效性都满足的估计量，其取值仍然是在真值附近摆动，我们希望随着样本容量n的增大，一个估计量的值稳定于待估参数的真值

- 相合性定义　设$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\ldots,X_n)$为参数$\theta$的估计量，若对于任意$\theta\in\Theta$，当$n\to\infty$时$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\ldots,X_n)$依概率收敛于$\theta$，则称$\hat{\theta}$为$\theta$的相合估计量

- 即，若对于任意的$\theta\in\Theta$都满足：对于任意的$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}=1$$

则称 $\hat{\theta}$ 为θ的相合估计量。

§7.3 估计量的评选标准

- 相合性是对估计量的基本要求
  - 只有样本容量相当大时才显出优越性，实际中很难做到，因此一般只考虑前两个标准
  - 若估计量不具有相合性，那么不论将样本容量n取得多么大，都不能将θ估计得足够准确，因而不可取
- 相合性的证明
  - 一般只需证明统计量的方差的极限为0，再利用契比雪夫不等式即可
  - 所以如果估计量的方差当n→∞时的极限等于0即可证明相合性

§ 7.3 估计量的评选标准

例 若总体X的$E(X)$和$D(X)$ 存在,则样本均值 $\overline{X}$ 是总体均值的相合估计.

解: $E(\overline{X}) = E(X)$

$$\lim_{n\to\infty} D(\overline{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{D(X)}{n} = 0$$

进一步，利用契比雪夫不等式的结果

$$P\{|\overline{X} - E(\overline{X})| < \varepsilon\} = P\{|\overline{X} - E(X)| < \varepsilon\}$$

$$> 1 - \frac{D(\overline{X})}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{D(X)}{n\varepsilon^2}$$

方程两边令n→∞取极限，并考虑到概率上限为1，即可得证

§ 7.3 估计量的评选标准

- 一般地,样本的*k*阶原点矩 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$ 是总体X的k阶原点矩 $E(X^k)$ 的相合估计.由此可见,矩估计往往是相合估计.

  - 因为样本k阶矩依概率收敛于总体k阶矩，
  - 其函数 $\hat{\theta}=g(\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2,\cdots\hat{\mu}_k)$ =g(A_1,A_2,…,A_k)是θ =g(μ_1,μ_2,…,μ_k)的 相合估计量

- 由最大似然估计法得到的估计量，在一定条件下也具有相合性

§ 7.3 估计量的评选标准

例 设总体 X 的二阶矩存在, $X_1, X_2, \cdots X_n$ 是总体 X 的样本, $n = 1,2,\cdots$, 试证

$$\hat{\mu}_n = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} iX_i$$

是总体均值 μ 的相合估计.

证明: $E(\hat{\mu}_n) = E\left(\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} iX_i\right) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} iE(X_i)$

$$= \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} i\mu = \frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \mu = \mu$$

§ 7.3 估计量的评选标准

$$D(\hat{\mu}_n)=D\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iX_i\right)=\left(\frac{2}{n(n+1)}\right)^2\sum_{i=1}^{n} i^2 D(X_i)$$

$$=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 D(X_i)$$

$$=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}D(X)$$

$$=\frac{2(2n+1)DX}{3n(n+1)}\to 0 \quad (n\to\infty)$$

所以 $\hat{\mu}_n$ 是 μ 的相合估计

第七章 参数估计

- § 7.1 点估计
- § 7.2 基于截尾样本的最大似然估计
- § 7.3 估计量的评选标准
- § 7.4 区间估计
- § 7.5 正态总体均值和方差的区间估计
- § 7.6 (0－1)分布参数的区间估计
- § 7.7 单侧置信区间

§7.4 区间估计

- 对于一个待估参数，在测量或计算时，常不以得到近似值为满足，还需要估计误差，即要求知道近似值的精确程度，亦即所求真值所在的范围
- 设总体X，参数θ为待估参数

  1）选一个符合评选标准的合适的估计量：无偏的，有效的，相合的

  2）点估计：得到参数θ的一个近似值

  3）区间估计：对于未知参数θ，除了求出它的点估计外，还希望估计出一个范围，并希望知道这个范围包含参数θ真值的可信程度。
- 这个范围通常以区间形式给出，同时还给出该区间包含参数θ真值的可信程度。这种形式的估计称为区间估计，这样的区间称为置信区间
- 区间估计的两个要素：一个是区间，一个是置信水平

§7.4 区间估计

置信区间的定义

设总体 X 的分布函数 $F(x;\theta)$ 含有一个未知参数 $\theta,\theta\in\Theta$, 对于给定值 $\alpha(0<\alpha<1)$ 若由样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 确定的两个统计量 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 和 $\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$, 对于任意的 $\theta\in\Theta$，满足

$$P\{\underline{\theta}\le\theta\le\overline{\theta}\}\ge 1-\alpha$$

则称随机区间 $[\underline{\theta},\overline{\theta}]$ 是 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间, $\underline{\theta}$ 和 $\overline{\theta}$ 分别称为置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间的置信下限和置信上限, $1-\alpha$ 为置信度.

§ 7.4 区间估计

关于定义的说明

被估计的参数 θ虽然未知,但它是一个常数，没有随机性，而区间$(\underline{\theta},\overline{\theta})$是随机的.

因此定义中以下表达式

$$P\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\}=1-\alpha$$

的本质是:

随机区间$(\underline{\theta},\overline{\theta})$以$1-\alpha$的概率包含着参数 θ的真值,而不能说参数 θ以$1-\alpha$的概率落入随机区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$.

§7.4 区间估计

- 当X是连续型随机变量时，对于给定的α，总是按要求$P(\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}) = 1 - \alpha$求出置信区间。

- 当X是离散型随机变量时，对于给定的α，常常找不到区间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$使得$P(\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta})$恰为$1-\alpha$，此时去找区间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$使得$P(\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta})$至少为$1-\alpha$，且尽可能的接近$1-\alpha$。

§7.4 区间估计

➲ 置信区间的计算方法

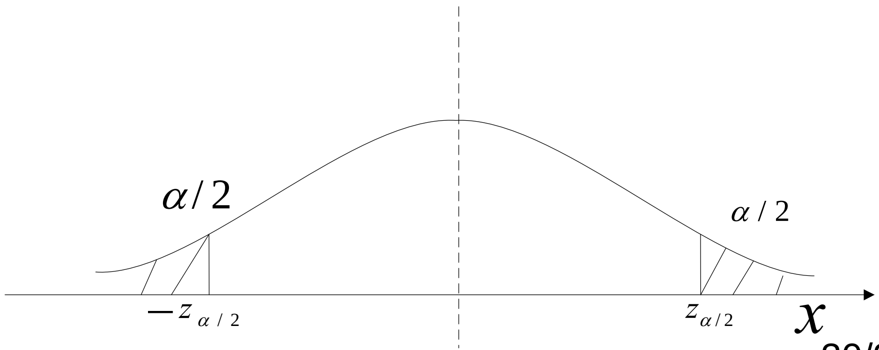
例：设总体X～$N(\mu,\sigma^2)$，σ^2为已知，μ为未知，设$X_1,X_2,\ldots,X_n$是来自X的样本，求μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间

解：置信区间由样本来确定，$\overline{X}$是μ的无偏估计，可由样本获得观察值，且 $\overline{X}\sim N(\mu,\sigma^2/n)$，所以

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

它不依赖于任何未知参数，按标准正态分布的上α分位点的定义，有

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$$



即 $P\{\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}<\mu<\overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\}=1-\alpha$

这样就得到了μ的一个置信水平为$1-\alpha$的置信区间

$$(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2})$$，常写成 $(\overline{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2})$

- 如：取$\alpha=0.05$，即$1-\alpha=0.95$，又若$\sigma=1$，n＝16，查表得$z_{0.025}$=1.96，可得置信水平为0.95的置信区间$(\overline{X}\pm0.49)$
- 若由一个样本值算得观察值 $\overline{x}=5.20$，则得到一个区间(5.20±0.49)即(4.71,5.69)该区间仍称为置信水平为0.95的置信区间。其含义是该区间包含真值μ的可信程度为95%

§7.4 区间估计

置信区间长度与估计精度

置信度与精度是一对矛盾，一般是在保证置信度的条件下，尽可能提高精度

- 与区间的取法和样本容量有关
- 在相同的置信水平下，置信区间越短，估计精度越高
- 置信水平为$1-\alpha$的置信区间不是唯一的，如在例1中若给定$\alpha=0.05$，则以下概率也成立

$$P\{-z_{0.04} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{0.01}\} = 0.95$$

- 即 $P\{\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.04} < \mu < \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.01}\} = 0.95$
- 故置信区间为$(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.04}, \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.01})$，也是置信水平为0.95的置信区间

§ 7.4 区间估计

- 现在比较一下两个置信区间的长度，当α=0.05时

  对于例1的置信区间长度为 $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.025} \times 2 = 3.922 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

  对于本例置信区间长度为$\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}(z_{0.04} + z_{0.01}) = 4.08 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

- 一般的，对于像标准正态分布概率密度函数那样，其图象单峰且对称的情况，当n固定时，取形如例1那样的按图象对称规律所取的置信区间其长度为最短，估计精度最高。

- 另外，在多数情况下，当样本容量增大时，区间长度减小，精度增高。但往往在实际应用中得到足够多的大量的样本是不实际的。

§ 7.4 区间估计

区间估计的一般方法

寻求未知参数θ的置信区间的具体做法如下：

(1) 寻求样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的一个函数 ：

$$W = W(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta)$$

其中仅包含待估参数 θ, 不含其它任何未知参数

并且 W 的分布已知 ,不依赖于任何未知参数 (包括 θ).

函数$W(X_1,X_2,\ldots,X_n;\theta)$的构造常从$\theta$的点估计着手考虑,
比如在例1中利用待估参数和相应估计量构造的一个标准正态分布函数

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

(2) 对于给定的置信水平 $1-\alpha$,决定出两个常数 a,b,

使$P\{a \le W(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta) \le b\} = 1-\alpha$.

比如例1中的$P\left\{\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$

这里尽量选取置信区间 使其长度最短，以达估 计精度

(3) 若能从 $a \le W(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta) \le b$ 得到等价的

不等式 $\underline{\theta} \le \theta \le \overline{\theta}$, 其中$\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$,

$\overline{\theta} = \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$都是统计量,那么$[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$就是

θ的一个置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间.

即例1中的$P\{\overline{X} - \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} < \mu < \overline{X} + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\} = 1-\alpha$

本章作业

- P_{173}：5，7(1)，8(1)，10，13