第五章 大数定律及中心极限定理

- §5.1 大数定律
- §5.2 中心极限定理

§5.1 大数定律

- 大数定律(law of large numbers)，又称大数定理，是<u>一种描述当试验次数很大时所呈现的概率性质的定律</u>。但是大数定律并<u>不是经验规律，而是严格证明了的定理</u>。

- 在前面我们接触了两个重要的概念
  - 大量试验后事件发生的频率n_A/n稳定于一个常数，即概率
  - 大量试验的算术平均值稳定于数学期望

- 大数定律就是以确切的数学形式表达了大量重复出现的随机现象的统计规律性
  - 即频率的稳定性和算术平均值的稳定性

§ 5.1 大数定律

弱大数定理 1(契比雪夫定理的特殊情况)

设随机变量$X_1, X_2,\ldots, X_n,\ldots$相互独立, 且具有相同的数学期望和方差: $E(X_k)=\mu$, $D(X_k)=\sigma^2(k=1,2,\ldots)$, 作前$n$个随机变量的算术平均值

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k,$$

则对于任意正数ε, 有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\overline{X}-\mu|<\varepsilon\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1$$

定理的解释：当$n\to\infty$时,

$\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu|<\varepsilon\}$ 这一随机事件的概率趋近于1

即对任意的正数ε，当n充分大时，不等式$|\overline{X}-\mu|<\varepsilon$成立的概率很大

证 由随机变量$X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots$相互独立，且具有相同的数学期望和方差，有

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right]=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(X_k)=\frac{1}{n}\cdot n\mu=\mu,$$

$$D\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right]=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D(X_k)=\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n},$$

- 由契比雪夫不等式可得

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu\right|<\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{\sigma^2/n}{\varepsilon^2}$$

在上式中令$n\to\infty$, 并注意到概率不能大于1, 即得

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

§5.1 大数定律

- **定理的实际含义：令ε充分小，当n充分大时，随机变量$X_1,X_2,\ldots,X_n$的算术平均值无限接近数学期望$E(X_1)=E(X_2)=\ldots=E(X_n)$，即当n无限增加时n个随机变量的算术平均值**

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$$

将几乎变成一个常数。这种接近是概率意义上的接近

§5.1 大数定律

- **概率中的几种收敛**
  - **依概率收敛**
  - **依分布收敛(弱收敛，只在连续点保证收敛)**
  - **几乎必然收敛，也叫几乎处处收敛**

§ 5.1 大数定律

- **定义** 已知随机变量序列$Y_1,Y_2,\ldots,Y_n,\ldots$与随机变量$Y$。如果对$\forall \varepsilon > 0$，都有$\lim\limits_{n\to\infty} P\{|Y_n - Y| < \varepsilon\} = 1,$

  那么我们就称随机变量序列$\{Y_n，n\in \mathrm{Z}^+\}$依概率收敛到随机变量$Y$，记为$Y_n \xrightarrow{P} Y.$

  依概率收敛的本质是Y_n对Y的绝对偏差小于任一给定量的可能性将随着n的增大而增大.

- 特别当Y为退化分布时,即$P\{Y=a\}=1$,则称序列依概率收敛于a,即$Y_n \xrightarrow{P} a$

如果把极限放到绝对值上，即差值的极限小于任意正数的概率为1则称为几乎处处收敛

§5.1 大数定律

- **依概率收敛序列的性质**
  - (只考虑收敛于常数a的情况):
- **若** $X_n \xrightarrow{P} a$，$Y_n \xrightarrow{P} b$，**又设函数**$g(x,y)$**在点**(a,b)**连续，**

则 $g(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} g(a,b)$

- **这样上述弱大数定理可以描述为**
- **定理一　设随机变量**$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$**相互独立，且具有相同的数学期望和方差：**$E(X_k)=\mu$，$D(X_k)=\sigma^2 (k=1,2,\ldots)$，**则序列** $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ **依概率收敛于**μ，

即 $\overline{X} \xrightarrow{P} \mu$

§5.1 大数定律

- 在概率极限理论中,研究随机变量序列收敛性的同时当然也要研究相应的分布函数序列的收敛性

  如：中心极限定理，第六章的经验分布函数F_n(x)等

- 定义3 设 $\{F_n(x),n\in \mathrm{N}\}$是一列定义在$R$上的有界非减右连续函数，如果存在一个满足同样条件的函数$F(x)$使得

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x)=F(x),\forall x\in C(F),$$

- 则称$\{F_n(\mathrm{x}),n\in \mathrm{N}\}$弱收敛到$F(x)$，记为 $F_n(x)\xrightarrow{\omega} F(x)$

- 如果F_n(x)是一列分布函数，并且存在分布函数$F(x)$，使得$F_n(x)\xrightarrow{\omega} F(x)$，那么我们就称$F_n$(x)依分布收敛到$F(x)$，记为$F_n(x)\xrightarrow{d} F(x)$。

§ 5.1 大数定律

- 依概率收敛包含了依分布收敛，反之不成立，依分布收敛是弱收敛
- 所谓“弱大数定律”，是指上述收敛为依概率收敛(in probability)，
- 所谓“强大数定律”，是指上述收敛为“几乎必然收敛”(almost surely/with probability one)

§ 5.1 大数定律

上述定理中要求随机变量$X_1,X_2,\ldots$的方差存在. 但这些随机变量服从相同分布的场合, 并不需要这一要求, 我们有以下的定理.

弱大数定理(辛钦定理)

设随机变量$X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots$相互独立, 服从同一分布, 且具有数学期望$E(X_k)=\mu$ $(k=1,2,\ldots)$, 则对于任意正数ε, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1$$

即序列 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ 依概率收敛于μ, $\overline{X}\xrightarrow{P}\mu$

§ 5.1 大数定律

伯努利大数定理(辛钦定理的推论)

设n_A是n次独立重复试验中事件A发生的次数. p是事件A在每次试验中发生的概率, 则对于任意正数$\varepsilon>0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1 \text{ 或 } \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right\}=0$$

证 因为$n_A\sim b(n,p)$, 且根据第四章中随机变量分解的思想, 有 $n_A=X_1+X_2+\ldots+X_n$, 其中, $X_1,X_2,\ldots,X_n$相互独立, 且都服从以p为参数的(0-1)分布,

$$X_i=\begin{cases}1, \text{在第i次实验中事件A发生}\\ 0, \text{在第i次实验中事件A不发生}\end{cases}$$

§5.1 大数定律

因而$E(X_k)=p$, $D(X_k)=p(1-p)$ $(k=1,2,\ldots,n)$，由定理一得

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)-p\right|<\varepsilon\right\}=1,$$

即 $$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

伯努利大数定理表明，事件发生的频率n_A/n依概率收敛于事件的概率p，以严格的数学形式表达了频率的稳定性和概率的合理性

近似：**当n很大时，事件发生的频率n_A/n与概率有较大偏差的可能性很小，因此由实际推断原理，由于小概率事件几乎不发生，当试验次数很大时，可以用事件的频率来代替事件的概率**

§ 5.1 大数定律

<table>
<tr><td rowspan="4">大数定律</td><td>处理问题</td><td colspan="2">定理</td><td>内容</td><td>定理条件</td><td>区别</td></tr>
<tr><td rowspan="3">频率和算术平均值的稳定性
弱大数定律</td><td rowspan="2">算术均值稳定性</td><td>契比雪夫定理特例</td><td>$\overline{X}\xrightarrow{P}\mu$</td><td>$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$相互独立，有相同的数学期望和方差</td><td>方差和期望存在，同分布</td></tr>
<tr><td>辛钦定理</td><td>$\overline{X}\xrightarrow{P}\mu$</td><td>$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$相互独立，服从同一分布，有相同期望</td><td>方差不必存在，同分布</td></tr>
<tr><td>频率稳定性</td><td>伯努利大数定律</td><td>$\frac{n_A}{n}\xrightarrow{P}p$</td><td>n重伯努利试验$X_1,X_2,\ldots,X_n$表示每次试验A是否发生，且相互独立，服从同一(0－1)分布，p为事件A每次试验的概率</td><td>辛钦定理的特例</td></tr>
</table>

第五章 大数定律及中心极限定理

- §5.1 大数定律
- §5.2 中心极限定理

§ 5.2 中心极限定理

- **实例：考察射击命中点与靶心距离的偏差**
  - 这种偏差是大量微小的偶然因素造成的微小误差的总和
  - 包括: 瞄准误差、测量误差、子弹制造过程方面 (如外形、重量等) 的误差以及射击时武器的振动、气象因素(如风速、风向、能见度、温度等) 的作用,
  - 所有这些不同因素所引起的微小误差是相互独立的, 并且它们中每一个对总和产生的影响不大
- 问题：某个随机变量是由大量相互独立且均匀小的随机变量相加而成的, 其概率分布有何规律?
- 在客观实际中有许多随机变量是由大量的相互独立的随机因素的综合影响所形成的，而其中每一个因素在总的影响中所起的作用都是微小的。这种随机变量往往近似地服从正态分布

§ 5.2 中心极限定理

定理4（独立同分布的中心极限定理，也叫作林德贝格-列维中心极限定理）

设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$相互独立,服从同一分布,且具有数学期望和方差：$E(X_k) = \mu$，$D(X_k) = \sigma^2 > 0\ (k = 1,2,\cdots)$，则随机变量之和的

标准化变量
$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}$$

§ 5.2 中心极限定理

的分布函数 $F_n(x)$ 对于任意 x 满足

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}\le x\right\}$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\Phi(x).$$

定理4表明:

当 $n\to\infty$,随机变量序列 Y_n 的分布函数收敛于标准正态分布的分布函数.

这种收敛是依分布收敛, 即 $F_n(x)\xrightarrow{d}\Phi(x)$

§5.2 中心极限定理

➲ 定理含义：

- 均值为μ，方差为$\sigma^2>0$的独立同分布的随机变量$X_1,X_2,\ldots,X_n$之和$\sum_{k=1}^{n} X_k$的标准化变量，当n充分大时，有

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \sim \text{近似} N(0,1)$$

这样可以用(标准)正态分布来对$\sum_{k=1}^{n} X_k$作理论分析或实际计算，不必求分布函数

§5.2 中心极限定理

- 将上式改写为 $\dfrac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$，这样有

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim\text{近似}N(0,1)\text{，或}$$

$$\overline{X}\sim\text{近似}N(\mu,\sigma^2/n)$$

- 即均值为μ，方差为$\sigma^2>0$的独立同分布的随机变量$X_1,X_2,\ldots,X_n$的算术平均$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$，当n充分大时，近似的服从均值为$\mu$，方差为$\sigma^2/n$的正态分布，这是数理统计中大样本统计的推断基础

§5.2 中心极限定理

定理5（李雅普诺夫Liapunov定理）

设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$相互独立，它们具有数学期望和方差：

$$E(X_k) = \mu_k\,, \quad D(X_k) = \sigma_k^2 \neq 0 \ (k = 1,2,\cdots),$$

记
$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2\,,$$

若存在正数δ，使得当$n \to \infty$时，

$$\frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} E\{|X_k - \mu_k|^{2+\delta}\} \to 0,$$

§ 5.2 中心极限定理

则随机变量之和的标准化变量

$$Z_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-E\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-\sum_{k=1}^{n}\mu_k}{B_n}$$

的分布函数 $F_n(x)$ 对于任意 x 满足

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-\sum_{k=1}^{n}\mu_k}{B_n}\le x\right\}$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\Phi(x).$$

§ 5.2 中心极限定理

定理5表明:

无论各个随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$服从什么分布, 只要满足定理的条件那么它们的和$\sum_{k=1}^{n} X_k$当$n$很大时, 近似地服从正态分布 这一结论具有普遍意义和广泛的实用价值

如：城市的总用电量，测量误差，实例中射击偏差等等

§ 5.2 中心极限定理

定理6(德莫佛－拉普拉斯定理De Moivre－Laplace)

设随机变量η_n $(n=1,2,\cdots)$ 服从参数为n, p $(0<p<1)$的二项分布, 则对于任意x, 恒有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \Phi(x).$$

证明 如伯努利大数定理中的处理 $\eta_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$,

其中 $X_1, X_2, \cdots, X_n$是相互独立的、服从同一(0—1)分布的随机变量, 分布律为

$$P\{X_k = i\} = p^i (1-p)^{1-i}, \qquad i = 0, 1.$$

§ 5.2 中心极限定理

$$\because E(X_k)=p,\quad D(X_k)=p(1-p)\quad (k=1,2,\cdots,n),$$

根据定理4得

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\eta_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le x\right\}=\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le x\right\}$$

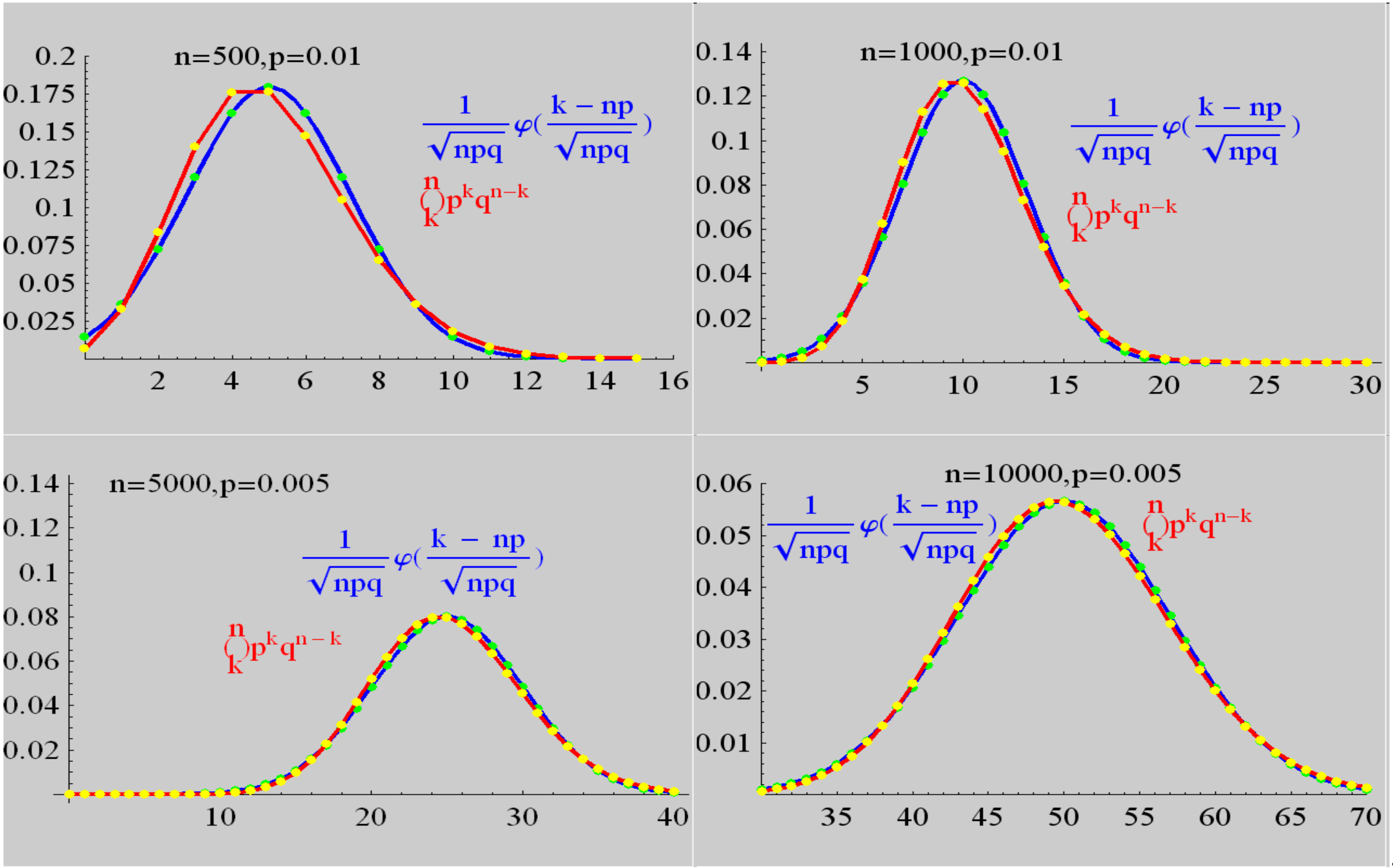
$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\Phi(x).$$

定理6表明:

正态分布是二项分布的极限分布, 当n充分大时, 可以利用该定理来计算二项分布的概率.

§ 5.2 中心极限定理

下面的图形表明:正态分布是二项分布的逼近.

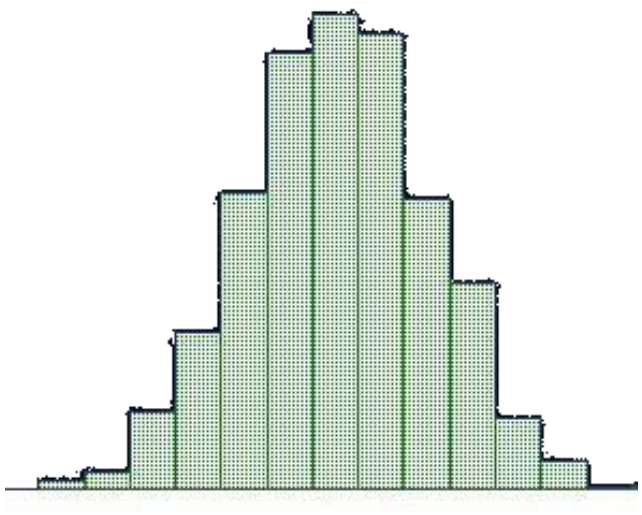


§5.2 中心极限定理

中心极限定理的意义

中心极限定理是概率论中最著名的结果之一，它不仅提供了计算独立随机变量之和的近似概率的简单方法，而且有助于解释为什么很多自然群体的经验频率呈现出钟形曲线这一值得注意的事实.

在后面的课程中，我们还将经常用到中心极限定理.



§ 5.2 中心极限定理

例1 一加法器同时收到20个噪声电压V_k $(k=1,2,\cdots 20)$, 设它们是相互独立的随机变量, 且都在区间$(0,10)$上服从均匀分布记$V=\sum_{k=1}^{20}V_k$, 求$P\{V>105\}$的近似值.

解 $\because E(V_k)=5,\quad D(V_k)=\dfrac{100}{12}\ (k=1,2,\cdots,20).$

由定理4.6, 随机变量Z近似服从正态分布$N(0,1)$,

§ 5.2 中心极限定理

其中 $$Z=\frac{\sum_{k=1}^{20}V_k-20\times 5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}=\frac{V-20\times 5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}$$

$$\therefore P\{V>105\}=P\left\{\frac{V-20\times 5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}>\frac{105-20\times 5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\right\}$$

$$=P\left\{\frac{V-20\times 5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}>0.387\right\}=1-P\left\{\frac{V-100}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\leq 0.387\right\}$$

$$\approx 1-\int_{-\infty}^{0.387}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=1-\Phi(0.387)=0.348.$$

§ 5.2 中心极限定理

例2：一船舶在某海区航行，已知每遭受一次海浪的冲击，纵摇角大于 3° 的概率为1/3，若船舶遭受了90000次波浪冲击，问其中有29500～30500次纵摇角大于 3° 的概率是多少？

解：将船舶每遭受一次海浪的冲击看作一次试验，

并假设各次试验是独立的，

在90000次波浪冲击中纵摇角大于 3° 的次数为X，

则X是一个随机变量，且$X \sim b(90000, \frac{1}{3})$.

§ 5.2 中心极限定理

分布律为 $P\{X=k\}=\binom{90000}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{90000-k}$

$$k=1,\cdots,90000.$$

所求概率为

$$P\{29500<X\leq 30500\}=\sum_{k=29501}^{30500}\binom{90000}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{90000-k}$$

直接计算很麻烦，利用德莫佛－拉普拉斯定理

$$P\{29500<X\leq 30500\}$$

$$=P\left\{\frac{29500-np}{\sqrt{np(1-p)}}<\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq\frac{30500-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\}$$

§ 5.2 中心极限定理

$$\approx \int_{\frac{29500-np}{\sqrt{np(1-p)}}}^{\frac{30500-np}{\sqrt{np(1-p)}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \Phi\left(\frac{30500-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{29500-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$\because n = 90000, \quad p = \frac{1}{3},$$

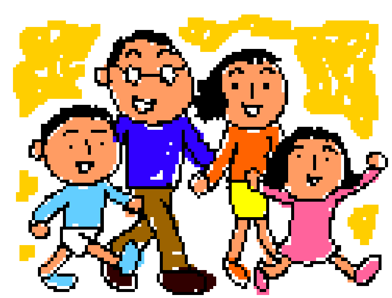
$$\therefore P\{29500 < X \le 30500\} \approx \Phi\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 0.9995.$$

§ 5.2 中心极限定理

例3　对于一个学生而言，来参加家长会的家长人数是一个随机变量. 设一个学生无家长、1名家长、2名家长来参加会议的概率分别为0.05、0.8、0.15. 若学校共有400名学生，设各学生参加会议的家长数相互独立，且服从同一分布. (1) 求参加会议的家长数X超过450的概率；(2) 求有1名家长来参加会议的学生数不多于340的概率.

解 (1) 以 $X_k\ (k = 1, 2, \cdots, 400)$ 记第 k 个学生来参加会议的家长数，



§ 5.2 中心极限定理

则 X_k 的分布律为

X_k	0	1	2
p_k	0.05	0.8	0.15

易知 $E(X_k)=1.1,\ D(X_k)=0.19, \quad (k=1,2,\cdots,400)$

而 $X=\sum_{k=1}^{400} X_k$，根据定理4

随机变量 $\dfrac{\sum_{k=1}^{400} X_k - 400\times 1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}} = \dfrac{X-400\times 1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}}$

近似服从正态分布 $N(0,1)$,

于是 $P\{X>450\}$

$$=P\left\{\frac{X-400\times 1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}}>\frac{450-400\times 1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}}\right\}$$

$$=1-P\left\{\frac{X-400\times 1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}}\le 1.147\right\}$$

$$\approx 1-\Phi(1.147)=0.1357;$$

§ 5.2 中心极限定理

(2) 以 Y 记有一名家长来参加会议的学生数,

则 $Y \sim b(400, 0.8)$, 由**德莫佛一拉普拉斯定理**知,

$$P\{Y \le 340\}$$

$$= P\left\{ \frac{Y - 400 \times 0.8}{\sqrt{400 \times 0.8 \times 0.2}} \le \frac{340 - 400 \times 0.8}{\sqrt{400 \times 0.8 \times 0.2}} \right\}$$

$$= P\left\{ \frac{Y - 400 \times 0.8}{\sqrt{400 \times 0.8 \times 0.2}} \le 2.5 \right\} \approx \Phi(2.5) = 0.9938 .$$

例4 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 且 X_i 在区间 $(-1, 1)$ 上服从均匀分布 $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 试证当 n 充分大时, 随机变量 $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 近似服从正态分布, 并指出其分布参数.

证 记 $Y_i = X_i^2$, $(i = 1,2,\cdots,n)$

$$E(Y_i) = E(X_i^2) = D(X_i) = \frac{1}{3},$$

$$D(Y_i) = E(Y_i^2) - [E(Y_i)]^2 = E(X_i^4) - [E(Y_i)]^2$$

因为 $E(X_i^4) = \int_{-1}^{1} x_i^4 \cdot \frac{1}{2} \mathrm{d}x_i = \frac{1}{5},$

所以 $D(Y_i)=\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{45}$,

因为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立,

所以 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 相互独立.

根据**定理4**

$$n\cdot Z_n=\sum_{i=1}^{n}X_i^2=\sum_{i=1}^{n}Y_i$$

近似服从正态分布 $N\left(\frac{n}{3},\frac{4n}{45}\right)$,

故 Z 近似地服从正态分布 $N\left(\frac{1}{3},\frac{4}{45n}\right)$.

本章小结

	处理问题	定理	内容	定理条件	区别
中心极限定理	大量独立随机因素综合影响的随机变量的极限分布 正态分布	林德贝格-列维/独立同分布	$\left.\dfrac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right\|_{n\to\infty}$ ~近似N(0,1)	$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$相互独立，同分布，数学期望和方差存在	
		李雅普诺夫定理	$\left.\dfrac{\sum_{K=1}^{n} X_k - \sum_{K=1}^{n}\mu_k}{B_n}\right\|_{n\to\infty}$ ~近似N(0,1)	$X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots$相互独立，数学期望和方差存在 存在正数$\delta$，使得当$n\to\infty$时 $\dfrac{1}{B_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n}E\{\|X_k-\mu_k\|^{2+\delta}\}\to 0$	不必同分布，有特殊条件具有普遍性
		棣莫弗－拉普拉斯定理	$\eta_n \sim b(n,p)$ $\left.\dfrac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\|_{n\to\infty}$ ~近似N(0,1)	$\eta_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$ 定理4推论 $X_1,X_2,\ldots,X_n$相互独立且服从同一$(0-1)$分布	二项分布的极限分布

本章作业

- 第一次：
  - P_{126}：1，3，5，10，11，13