

第四章 随机变量的数字特征

- ⇒ § 4.1 数学期望
- ⇒ § 4.2 方差
- ⇒ § 4.3 协方差及相关系数
- ⇒ § 4.4 矩、协方差矩阵

第四章 随机变量的数字特征

⇒ § 4.1 数学期望

⇒ § 4.2 方差

⇒ § 4.3 协方差及相关系数

⇒ § 4.4 矩、协方差矩阵

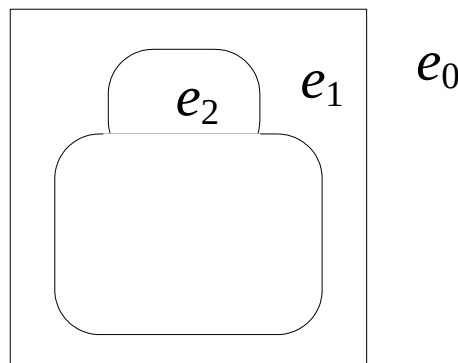
§ 4.1 数学期望

- 概率分布虽然能够完整的描述随机变量的统计特征，但有时对于我们关心的问题而言却不直观。如：
 - 研究水稻品种时，常关注的是**稻穗的平均稻谷粒数**，这从稻谷粒数的分布函数是不能直接看出来的，而且在实际生产中可能只关心该平均值，甚至不关心分布函数。
 - 一篮球队上场比赛的运动员身高是一随机变量，常关心平均身高
 - 研究信道上的随机噪声时，出于热噪声功率对系统可能产生较大影响的考虑，对噪声的均值很关心，而且还关心噪声电压的大小与噪声电压的均值的偏离程度。这两个量在实际系统中往往比知道随机变量的分布更重要
- 本章重点讨论数学期望，方差，相关系数，矩等

§ 4.1 数学期望

实例：一射手进行打靶练习，规定

- 打中区域 e_0 得0分
- 打中区域 e_1 得1分
- 打中区域 e_2 得2分



⇒ 以 X 记每次射击得分数，则 X 的分布律如下：

X	0	1	2
p_k	p_0	p_1	p_2

§ 4.1 数学期望

○ 考察每次射击的平均得分数？

- 射击 N 次，其中得0分有 a_0 次，得1分有 a_1 次，得2分有 a_2 次

$$\text{即 } N = a_0 + a_1 + a_2$$

- 射击 N 次得分总和为 $a_0 \times 0 + a_1 \times 1 + a_2 \times 2$

- $\therefore$ 每次射击平均分数为 $(a_0 \times 0 + a_1 \times 1 + a_2 \times 2)/N = \sum_{k=0}^2 k \frac{a_k}{N}$ ，
这是有限次实验的**算术平均值**，其中 $\frac{a_k}{N}$ 是事件 $P\{X=k\}$ 的频率。

○ 当 $N \rightarrow \infty$ 时， $\frac{a_k}{N}$ 无限的接近一个稳定的常数 p_k ，即事件 $P\{X=k\}$ 发生的概率

○ 也就是说，当 $N \rightarrow \infty$ 时，算术平均值 $\sum_{k=0}^2 k \frac{a_k}{N} \rightarrow \sum_{k=0}^2 k p_k$ 一个稳定的常数值，就把该值称为随机变量 X 的**数学期望或均值**
Expectation

§ 4.1 数学期望

定义 设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k, \quad k=1,2,\dots$$

- 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛, 则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 的和为随机变量 X 的数学期望, 记为 $E(X)$,

$$\text{即 } E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

- 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$, 若积分 $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ 绝对收敛, 则称积分 $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ 的值为随机变量 X 的数学期望, 记为 $E(X)$,

$$\text{即 } E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

§ 4.1 数学期望

➤ 数学期望简称期望，又称为均值

➤ 物理意义

- **质心的概念**：可以把物体的质量看作是集中在一点处，如果一条直线的质量线密度为 $f(x)$ ， x 为直线上任一质点的坐标，那么直线的质心的位置 $x_c = ?$

$$x_c = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx / \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

现在如果 $f(x)$ 是概率密度，则

$$x_c = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx / \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx / 1$$

➤ 即 $x_c = E(X)$ ，数学期望相当于质心的坐标

§ 4.1 数学期望

- $E(X)$ 是实数而非变量，它是一种**加权平均**，与一般变量的算术平均值不同。
- 大量试验的算术平均值趋近于期望
- 只有级数的和或广义积分的值存在，数学期望才有意义，而有时是不存在的
 - 注意绝对收敛与条件收敛的区别，某些交错级数是条件收敛的，其和可能不为1，因此期望不存在。如果一个数项级数 $\{u_n\}$ 的各项取绝对值后满足收敛，则称数项级数 $\{u_n\}$ 绝对收敛，相应的如果绝对值的积分收敛，则绝对收敛
- 数学期望 $E(X)$ 完全由随机变量 X 的概率分布所确定
 - 若 X 服从某一分布，也称 $E(X)$ 为这一分布的数学期望，比如二项分布，均匀分布等的数学期望

§ 4.1 数学期望

例 设随机变量 X 服从柯西分布, 其密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

求 $E(X)$.

解: 由于积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{dx}{\pi(1+x^2)} = \infty$

因此柯西分布的数学期望不存在.

§ 4.1 数学期望

例：甲乙两人打靶，所得分数X和Y分布律为

X	0	1	2
p_k	0	0.2	0.8

Y	0	1	2
p_k	0.6	0.3	0.1



试评定它们成绩的好坏

➤ 解 主要看多次射击的得分均值，即数学期望，

$$\text{离散型: } E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

$$E(X) = 0 \times 0 + 1 \times 0.2 + 2 \times 0.8 = 1.8 \text{分}$$

$$E(Y) = 0 \times 0.6 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.1 = 0.5 \text{分}$$

所以乙的成绩远不如甲的成绩

§ 4.1 数学期望

例2 有两个相互独立工作的电子装置，寿命 X_1 和 X_2 服从同一指数分布

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad \theta > 0.$$

若将二者串联成整机，求整机寿命 N 的数学期望 $E(N)$

➤ 解 $N = \min(X_1, X_2)$ ，要求期望，先求概率密度，本题要先求 N 的分布函数

$$\therefore F_{\min}(x) = 1 - [1 - F(x)]^2 \quad // X_1, X_2 \text{ 独立同分布}$$

$$\text{又 } F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/\theta}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

$$\therefore F_{\min}(x) = 1 - [1 - F(x)]^2 = \begin{cases} 1 - e^{-2x/\theta}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\therefore f_{\min}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\theta} e^{-2x/\theta}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad \text{服从参数为 } \theta/2 \text{ 的指数分布}$$

$$\therefore E(N) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\min}(x) dx = \theta/2, \quad \text{指数分布的均值即参数 } \theta/2$$

§ 4.1 数学期望

例3 如何确定投资决策方向?

某人有10万元现金, 想投资于某项目, 欲估成功的机会为 30%, 可得利润8万元, 失败的机会为70%, 将损失 2 万元. 若存入银行, 同期间的利率为5%, 问是否作此项投资?



解 设 X 为投资利润, 则

X	8	-2
p	0.3	0.7

$$E(X) = 8 \times 0.3 - 2 \times 0.7 = 1(\text{万元}),$$

存入银行的利息: $10 \times 5\% = 0.5(\text{万元}),$

故应选择投资.

§ 4.1 数学期望

例 设随机变量 X 服从 $\Gamma(\alpha, \beta)$ 分布, 其密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & x > 0 \end{cases}$$

求 $E(X)$

解 $E(X) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^\alpha e^{-x/\beta} dx$ $y = x/\beta$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\beta y^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-y} dy = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha+1) = \alpha\beta$$

当 $\alpha = 1$ 时, X 服从参数为 β 的指数分布, 这时 $E(X) = \beta$.

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

§ 4.1 数学期望

例 按规定,某车站每天 $8:00 \sim 9:00$, $9:00 \sim 10:00$ 都恰有一辆客车到站,但到站的时刻是随机的,且两者到站的时间相互独立.其规律为

到站时刻	8:10	8:30	8:50
	9:10	9:30	9:50
概率	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$



- (i) 一旅客 $8:00$ 到车站,求他候车时间的数学期望.
- (ii) 一旅客 $8:20$ 到车站,求他候车时间的数学期望.

§ 4.1 数学期望

解 设旅客的候车时间为 X (以分计).

(i) X 的分布律为

X	10	30	50
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

候车时间的数学期望为

$$E(X) = 10 \times \frac{1}{6} + 30 \times \frac{3}{6} + 50 \times \frac{2}{6} = 33.33(\text{分}).$$

(ii) X 的分布律为

X	10	30	50	70	90
p_k	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \times \frac{3}{6}$	$\frac{1}{6} \times \frac{2}{6}$

候车时间的数学期望为

$$E(X) =$$

$$10 \times \frac{3}{6} + 30 \times \frac{2}{6} + 50 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + 70 \times \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} + 90 \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} = 27.22(\text{分}).$$

§ 4.1 数学期望

➡ 随机变量的函数的数学期望

- 比如：飞机机翼受到的正压力 $W = kV^2$ 是风速 V 的函数，如果 V 的分布已知，如何求得 W 的数学期望，而无需先求出 W 的分布
- 先由 V 的分布求其函数 W 的分布，再求数学期望是可以的，而还有更简单直接的求解方法

§ 4.1 数学期望

➤ 定理

- 设Y是随机变量X的函数: $Y=g(X)$, 其中g是连续函数

(i) X是离散型随机变量, 分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k, \quad k=1,2,\dots$$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$ 绝对收敛, 则有 $E(Y)=E(g(X))=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$

(ii) X是连续型随机变量, 概率密度为 $f(x)$,

若积分 $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$ 绝对收敛, 则有

$$E(Y)=E(g(X))=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

➤ 这样求 $E(Y)$ 而不必算出Y的分布

§ 4.1 数学期望

➤ 定理的证明(略)，以下对离散型X进行简要说明

$$\begin{aligned} \Rightarrow E(Y) &= \sum_{k=1}^{\infty} y_k P\{Y = y_k\} = \sum_{k=1}^{\infty} y_k P\{g(X) = y_k\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (y_k \sum_{x_i: g(x_i)=y_k} P\{X = x_i\}) = \sum_{k=1}^{\infty} (\sum_{x_i: g(x_i)=y_k} y_k P\{X = x_i\}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (\sum_{x_i: g(x_i)=y_k} g(x_i) P\{X = x_i\}) \end{aligned}$$

➤ 实际上是对所有的X的取值的概率的加权求和

$$E(Y) = \sum_{t=1}^{\infty} g(x_t) P\{X = x_t\}$$

➤ 连续型的特例情况下证明，请参看教材

§ 4.1 数学期望

- 推广：多维随机变量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的函数 $Y = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 也满足以上定理。

例如：若 $Z = g(X, Y)$ ，且 g 是连续函数，则

- 若 (X, Y) 是连续型随机变量，概率密度为 $f(x, y)$ ，那么

$$E(Z) = E(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$$

只要该积分绝对收敛则存在

- 若 (X, Y) 是离散型随机变量，分布律 $P\{X=x_i, Y=y_j\} = p_{ij}$ ， $i, j=1, 2, \dots$ 那么

$$E(Z) = E(g(X, Y)) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i, y_j) p_{ij} \quad ,$$

右边级数绝对收敛

§ 4.1 数学期望

例9：设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} 3/(2x^3 y^2), & 1/x < y < x, x > 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求数学期望 $E(Y)$, $E(1/(XY))$

➤ 解 此时可以看成是函数 $z = g(x,y) = y$

$$\begin{aligned} \text{这样 } E(Z) = E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x,y) dx dy \\ &= \int_1^{\infty} \int_{1/x}^x \frac{3}{2x^3 y} dy dx = 3/4 \end{aligned}$$

也可以先求Y的边缘概率密度，再用数学期望定义求解

➤ 对于第2个问题

$$\begin{aligned} E(Z) = E(1/(XY)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{xy} f(x,y) dx dy \\ &= \int_1^{\infty} \int_{1/x}^x \frac{1}{2x^4 y^3} dy dx = 3/5 \end{aligned}$$

§ 4.1 数学期望

例10 设 (X, Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	1	2	3
-1	0.2	0.1	0
0	0.1	0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

求: $E(X)$, $E(Y)$, $E(Y/X)$, $E[(X - Y)^2]$.

解 X 的分布律为

X	1	2	3
p	0.4	0.2	0.4

§ 4.1 数学期望

得 $E(X) = 1 \times 0.4 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.4 = 2.$

Y 的分布律为

Y	-1	0	1
p	0.3	0.4	0.3

得 $E(Y) = -1 \times 0.3 + 0 \times 0.4 + 1 \times 0.3 = 0.$

由于

p	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3	0.1
(X, Y)	$(1, -1)$	$(1, 0)$	$(1, 1)$	$(2, -1)$	$(2, 1)$	$(3, 0)$	$(3, 1)$
Y/X	-1	0	1	$-1/2$	$1/2$	0	$1/3$

§ 4.1 数学期望

于是

$$\begin{aligned} E\left(\frac{Y}{X}\right) &= -1 \times 0.2 + 0 \times 0.1 + 1 \times 0.1 - \frac{1}{2} \times 0.1 + \frac{1}{2} \times 0.1 + 0 \times 0.3 + \frac{1}{3} \times 0.1 \\ &= \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

p	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3	0.1
(X, Y)	(1, -1)	(1, 0)	(1, 1)	(2, -1)	(2, 1)	(3, 0)	(3, 1)
$(X - Y)^2$	4	1	0	9	1	9	4

$$\begin{aligned} \text{得 } E[(X - Y)^2] &= 4 \times 0.3 + 1 \times 0.2 + 0 \times 0.1 + 9 \times 0.4 \\ &= 5. \end{aligned}$$

§ 4.1 数学期望

- 例10：某公司计划开发一种新产品市场，并试图确定该产品的产量，他们估计

售一件产品可获利 m 元，积压一件产品亏损 n 元

现在可预测销售量 Y 服从参数为 θ 的指数分布

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad \theta > 0.$$

问若要获得利润的数学期望最大，应生产多少件产品？

- 解：显然获利多少 Q 是生产产品数量 x (确定量)和销售量 Y (随机变量)的函数

$$Q = Q(x, Y) = \begin{cases} mY - n(x - Y), & \text{若 } Y < x \\ mx, & Y \geq x \end{cases},$$

从随机变量的角度看， Q 是一个随机变量，它是 Y 的函数，而 Y 的分布已知

§ 4.1 数学期望

- ⇒ 固有 $E(Q) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(x, y) f(y) dy = \int_0^{\infty} Q(x, y) \frac{1}{\theta} e^{-y/\theta} dy$
- $$= \int_0^x [my - n(x - y)] \frac{1}{\theta} e^{-y/\theta} dy + \int_x^{\infty} mx \frac{1}{\theta} e^{-y/\theta} dy$$
- $$= (m+n)\theta - (m+n)\theta e^{-x/\theta} - nx$$
- ⇒ 令 $dE(Q)/dx = (m+n)\theta e^{-x/\theta} - n = 0$ 得到 $x = -\theta \ln\left(\frac{n}{n+m}\right)$
- 又 $d^2E(Q)/dx^2 = -\frac{m+n}{\theta} e^{-x/\theta} < 0$,
- ⇒ 所以 $x = -\theta \ln\left(\frac{n}{n+m}\right)$ 时 $E(Q)$ 取唯一极大值, 即最大值

§ 4.1 数学期望

数学期望的性质

1° 设 C 是常数, 则有 $E(C)=C$

- 相当于 $X=C$ 为必然事件, 分布律为 $P\{X=C\}=1$
- 所以, $E(C)=C \times 1=C$

2° 设 X 是一个随机变量, C 是常数, 则有

$$E(CX)=CE(X)$$

- 证: 令 $Y=CX$, 则 Y 是 X 的函数, 则
- $E(Y)=E(CX)=\int_{-\infty}^{\infty} Cxf(x)dx = C\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = CE(X)$

§ 4.1 数学期望

➤ 3° 设 X, Y 是两个随机变量, 则有

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

● 可推广到任意有限个随机变量之和的情况

➤ 证: 仅就连续型的随机变量加以证明

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度 $f(x, y)$, 边缘概率密度为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x + y) f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dx dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = E(X) + E(Y) \end{aligned}$$

§ 4.1 数学期望

➤ 4° 设 X, Y 是相互独立的随机变量, 则有

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

- 可以推广到任意有限个独立随机变量之积的情况

➤ 证: 仅证连续型

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y)dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf_X(x)f_Y(y)dx dy \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy \right] = E(X)E(Y) \end{aligned}$$

➤ 有了以上性质后, 再求解数学期望的问题时就可利用性质, 简化求解复杂度

§ 4.1 数学期望

例12 随机变量分解

一民航送客车载有20位旅客自机场开出,旅客有10个车站可以下车.如到达一个车站没有旅客下车就不停车,以 X 表示停车的次数,求 $E(X)$ (设每位旅客在各个车站下车是等可能的,并设各旅客是否下车相互独立).



注意: 这里的起点和终点不在这10个车站范围内

解 引入随机变量 X_i ,

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{在第 } i \text{ 站没有人下车,} \\ 1, & \text{在第 } i \text{ 站有人下车,} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, 10.$$

则
$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_{10}.$$

§ 4.1 数学期望

$$\text{则有 } P\{X_i = 0\} = \left(\frac{9}{10}\right)^{20}, \quad P\{X_i = 1\} = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20}, \\ i = 1, 2, \dots, 10.$$

$$\text{由此 } E(X_i) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20}, \quad i = 1, 2, \dots.$$

$$\begin{aligned} \text{得 } E(X) &= E(X_1 + X_2 + \dots + X_{10}) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_{10}) \\ &= 10 \left[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20} \right] = 8.784(\text{次}). \end{aligned}$$

※将 X 分解成数个随机变量之和，然后利用随机变量和的数学期望等于随机变量数学期望之和来求解数学期望

※典型的例子是二项分布的随机变量可以分解为若干个0—1分布的随机变量之和

§ 4.1 数学期望

例 设	X	-2	0	1	3
	p	$1/3$	$1/2$	$1/12$	$1/12$

求: $E(2X^3 + 5)$.

$$\begin{aligned}\text{解 } E(2X^3 + 5) &= 2E(X^3) + E(5) \\ &= 2E(X^3) + 5,\end{aligned}$$

$$\text{又 } E(X^3) = (-2)^3 \times \frac{1}{3} + 0^3 \times \frac{1}{2} + 1^3 \times \frac{1}{12} + 3^3 \times \frac{1}{12} = -\frac{1}{3},$$

$$\text{故 } E(2X^3 + 5) = 2E(X^3) + 5 = 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 5 = \frac{13}{3}.$$

§ 4.1 数学期望

例4 设一电路中电流 $I(A)$ 与电阻 $R(\Omega)$ 是两个相互独立的随机变量, 其概率密度分别为

$$g(i) = \begin{cases} 2i, & 0 \leq i \leq 1, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases} \quad h(r) = \begin{cases} \frac{r^2}{9}, & 0 \leq r \leq 3, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

试求电压 $V = IR$ 的均值.

解 $E(V) = E(IR) = E(I)E(R)$ I和R相互独立

$$\begin{aligned} &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} ig(i) di \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} rh(r) dr \right] \\ &= \left[\int_0^1 2i^2 di \right] \left[\int_0^3 \frac{r^2}{9} dr \right] = \frac{3}{2} (V). \end{aligned}$$

本章作业

- P_{113} : 1(3), 2, 4, 6, 7