

第三章 多维随机变量及其分布

⇒ § 3.1 二维随机变量

⇒ § 3.2 边缘分布

⇒ § 3.3 条件分布

⇒ § 3.4 相互独立的随机变量

⇒ § 3.5 两个随机变量的函数的分布

第三章 多维随机变量及其分布

⇒ § 3.1 二维随机变量

⇒ § 3.2 边缘分布

⇒ § 3.3 条件分布

⇒ § 3.4 相互独立的随机变量

⇒ § 3.5 两个随机变量的函数的分布

§ 3.2 边缘分布

例4 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty,$$

其中 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 都是常数, 且 $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0,$

$$-1 < \rho < 1.$$

试求二维正态随机变量的边缘概率密度

§ 3.2 边缘分布

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

解 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy,$

由于

$$\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} = \left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2 - \rho^2\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2},$$

于是

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2} dy,$$

令 $t = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right),$

§ 3.2 边缘分布

由于 $-\infty < y < \infty$ 所以 $-\infty < t < \infty$, 而 $dt = dy \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}}$

$$\text{则有 } f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

$$\text{即 } f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

同理可得

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}, \quad -\infty < y < \infty.$$

二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布, 并且都不依赖于参数 ρ

联合分布包含更多的信息, 由联合分布可以求出边缘分布, 但由边缘分布一般无法求出联合分布

§ 3.2 边缘分布

边缘分布均为正态分布的随机变量,其联合分布不一定是二维正态分布, 例如

令 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} (1 + \sin x \sin y),$$

显然, (X,Y) 不服从正态分布但是

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

因此边缘分布均为正态分布的随机变量,其联合分布不一定是二维正态分布.

§ 3.2 边缘分布

例 设 $(X, Y) \sim f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$

求 (1) $f_X(x)$; (2) $P\{X + Y \leq 1\}$.

解 当 $x > 0$ 时,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_x^{\infty} e^{-y} dy = e^{-x}.$$

当 $x \leq 0$ 时,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = 0.$$

故 $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$

§ 3.2 边缘分布

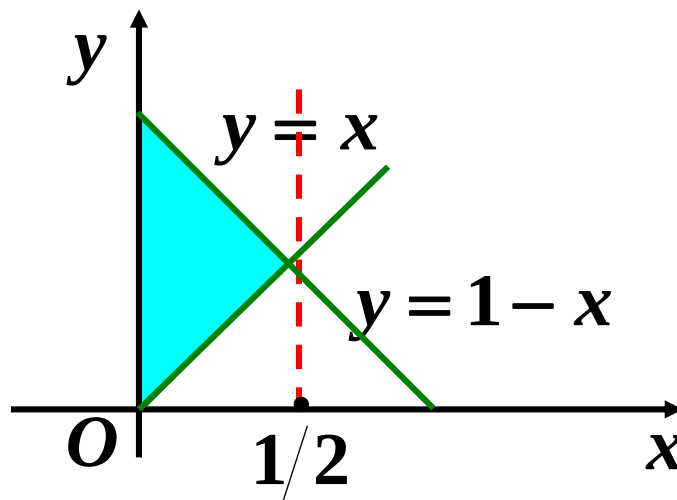
$$(2) P\{X + Y \leq 1\}$$

$$= \iint_{x+y \leq 1} f(x, y) dx dy$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{1-x} e^{-y} dy$$

$$= -\int_0^{\frac{1}{2}} [e^{-(1-x)} - e^{-x}] dx$$

$$= 1 + e^{-1} - 2e^{-\frac{1}{2}}.$$



§ 3.2 边缘分布

例2 一整数 N 等可能地在 $1, 2, 3, \dots, 10$ 十个值中取一个值. 设 $D = D(N)$ 是能整除 N 的正整数的个数, $F = F(N)$ 是能整除 N 的素数的个数. 试写出 D 和 F 的联合分布律. 并求边缘分布律.

解

样本点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
F	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2

由此得 D 和 F 的联合分布律与边缘分布律:

§ 3.2 边缘分布

样本点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
F	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2

$F \backslash D$	1	2	3	4	$P\{F = j\}$
0	1/10	0	0	0	1/10
1	0	4/10	2/10	1/10	7/10
2	0	0	0	2/10	2/10
$P\{D = i\}$	1/10	4/10	2/10	3/10	1

或将边缘分布律表示为

D	1	2	3	4
p_k	1/10	4/10	2/10	3/10

F	0	1	2
p_k	1/10	7/10	2/10

第三章 多维随机变量及其分布

⇒ § 3.1 二维随机变量

⇒ § 3.2 边缘分布

⇒ § 3.3 条件分布

⇒ § 3.4 相互独立的随机变量

⇒ § 3.5 两个随机变量的函数的分布

§ 3.3 条件分布

问题

考虑一大群人,从其中随机挑选一个人,分别用 X 和 Y 记此人的体重和身高,则 X 和 Y 都是随机变量,他们都有自己的分布

现在如果限制 Y 取值为1.6米,在这个限制下求 X 的分布



§ 3.3 条件分布

⇒ 设 (X, Y) 是二维离散型随机变量，其分布律为

⇒
$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, \quad i, j=1, 2, \dots$$

⇒ (X, Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律为

⇒
$$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}, \quad i=1, 2, \dots,$$

⇒
$$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}, \quad j=1, 2, \dots$$

⇒ 考虑在事件 $\{Y=y_j\}$ 发生的条件下，事件 $\{X=x_i\}$ 发生的概率，即求事件 $\{X=x_i | Y=y_j\}$ ， $i=1, 2, \dots$ 发生的概率

§ 3.3 条件分布

定义 设 (X, Y) 是二维离散型随机变量
对于固定的 j , 若 $P\{Y = y_j\} > 0$, 则称

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},$$

为在 $Y = y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律
对于固定的 i , 若 $P\{X = x_i\} > 0$, 则称

$$P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},$$

为在 $X = x_i$ 条件下随机变量 Y 的条件分布律

其中 $i, j = 1, 2, \dots$

该条件概率具有分布律的性质:

1. 非负性
2. 归一性:

§ 3.3 条件分布

- 例2：一射手进行射击，击中目标的概率为 $p(0 < p < 1)$ ，射击直到击中目标两次为止。设以 X 表示首次击中目标所进行的射击次数，以 Y 表示总共进行的射击次数，试求 X 和 Y 的联合分布律及条件分布律。
- 解：实际上本题是求三个分布律：
 - $P\{X=m, Y=n\}$
 - $P\{Y=n | X=m\}$
 - $P\{X=m | Y=n\}$

§ 3.3 条件分布

- 按题意， $Y=n$ 表示第 n 次射击时击中目标，且在前 $n-1$ 次射击中恰有一次击中目标，各次射击是相互独立的。这样 $\{Y=n, X=m\}$ 表示分别在第 m 次和第 n 次击中目标而其它 $n-2$ 次没击中这一事件。于是

$$\begin{aligned} P\{X=m, Y=n\} &= \underbrace{(1-p) \cdots (1-p)}_{\text{第}m\text{次}} \cdot \underbrace{p}_{\text{第}n\text{次}} \cdot (1-p) \cdots (1-p) \\ &= p^2(1-p)^{n-2} \end{aligned}$$

- 即联合分布律为

$$P\{X=m, Y=n\} = p^2(1-p)^{n-2}, \quad m=1, 2, \dots, n-1, \quad n=m+1, m+2, \dots$$

注意条件不能少

§ 3.3 条件分布

➡ 又关于X的边缘分布律

$$\begin{aligned} P\{X=m\} &= \sum_{n=m+1}^{\infty} P\{X=m, Y=n\} = \sum_{n=m+1}^{\infty} p^2(1-p)^{n-2} \\ &= \frac{p^2(1-p)^{m+1-2}}{1-(1-p)} = p(1-p)^{m-1}, \\ m &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{Y=n\} &= \sum_{m=1}^{n-1} p^2(1-p)^{n-2} \\ &= (n-1)p^2(1-p)^{n-2}, \quad n=2, 3, \dots \end{aligned}$$

§ 3.3 条件分布

- 于是由条件分布律的定义：

当 $m=1, 2, \dots$ 时

$$P\{Y=n|X=m\} = P\{Y=n, X=m\}/P\{X=m\} = p^2(1-p)^{n-2}/p(1-p)^{m-1} = p(1-p)^{n-m-1}, \quad n=m+1, m+2, \dots$$

当 $n=2, 3, \dots$ 时

$$P\{X=m|Y=n\} = P\{Y=n, X=m\}/P\{Y=n\} = p^2(1-p)^{n-2}/(n-1)p^2(1-p)^{n-2} = 1/(n-1), \quad m=1, 2, \dots, n-1$$

- ※在写条件分布律 $P\{Y=n|X=m\}$ 时一定在分布律之前给出条件 $P\{X=m\}$ 不等于0的范围，而在分布律之后也要注明 Y 的取值范围

§ 3.3 条件分布

- 连续型随机变量的条件概率密度：
- 对于连续型随机变量由于对于任意的 x 或者 y ， $P\{Y=y\}=0$ ， $P\{X=x\}=0$ ，无法用条件概率公式计算 $P\{X=x|Y=y\}$ 。
- 转而求分布函数 $P\{X\leq x|Y=y\}$ 并记为 $F_{X|Y}(x|y)$
 - 由于 $P\{Y=y\}=0$ ，我们讨论在一个充分小的邻域内事件 $\{y-\varepsilon<Y\leq y+\varepsilon\}$ 发生的条件下的 $X\leq x$ 的概率 $P\{X\leq x|y-\varepsilon<Y\leq y+\varepsilon\}$ ，其中 $P\{y-\varepsilon<Y\leq y+\varepsilon\}>0$

然后对任意的 x ，令 $\varepsilon\rightarrow 0$ 对 $P\{X\leq x|y-\varepsilon<Y\leq y+\varepsilon\}$ 取极限得到 $F_{X|Y}(x|y)=P\{X\leq x|Y=y\}$

- 注：在条件概率中，作为条件的随机变量的取值是一个确定的单点值。
- 如果条件是一个范围，则直接用条件概率公式计算即可

§ 3.3 条件分布

$$\Rightarrow P\{X \leq x | y - \varepsilon < Y \leq y + \varepsilon\}$$

$$F_{X|Y}(x|y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P\{X \leq x | y - \varepsilon < Y \leq y + \varepsilon\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P\{X \leq x, y - \varepsilon < Y \leq y + \varepsilon\}}{P\{Y - \varepsilon < Y \leq y + \varepsilon\}}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(x, y + \varepsilon) - F(x, y - \varepsilon)}{F_Y(y + \varepsilon) - F_Y(y - \varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{[F(x, y + \varepsilon) - F(x, y - \varepsilon)] / 2\varepsilon}{[F_Y(y + \varepsilon) - F_Y(y - \varepsilon)] / 2\varepsilon}$$

$$= \frac{\partial / \partial y \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(x, y) dx dy}{f_Y(y)} = \frac{\int_{-\infty}^x f(x, y) dx}{f_Y(y)} = \int_{-\infty}^x \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx$$

$$\Rightarrow \text{类似的有 } F_{Y|X}(y|x) = \frac{\partial F(x, y) / \partial x}{dF_X(x) / dx} = \int_{-\infty}^y \frac{f(x, y)}{f_X(x)} dy$$

§ 3.3 条件分布

➤ 与概率密度定义比较, 可知

➤ 条件概率密度定义

- 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, (X, Y) 关于 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)$, 若对于固定的 y , $f_Y(y) > 0$, 则称 $\frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$ 为 $Y=y$ 的条件下 X 的条件概率密度, 记为

- $$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

- 称 $F_{X|Y}(x|y) = P\{X \leq x | Y = y\} = \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(x|y) dx = \int_{-\infty}^x \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx$

为 $Y=y$ 的条件下 X 的条件分布函数

- 类似的有 $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$, $F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^y \frac{f(x, y)}{f_X(x)} dy$

§ 3.3 条件分布

例 设 G 是平面上的有界区域其面积为 A . 若二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{A}, & (x, y) \in G, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

设 (X, Y) 在圆域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上服从均匀分布求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

解 ①求联合概率密度

由题意知随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/\pi, & x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

§ 3.3 条件分布

②求边缘概率密度，确定满足 $f_Y(y)>0$ 的 y 的范围

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2}, & -1 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

③在 y 的范围内计算条件概率密度

于是当 $-1 < y < 1$ 时,有

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1/\pi}{(2/\pi)\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, & -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

※求解条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 时，前面要给出条件 $f_Y(y)>0$ 的 y 的区间，在后面给出 X 的取值范围。在 $(-\infty, \infty)$ 区间上都有定义

§ 3.3 条件分布

例 设数 X 在区间 $(0,1)$ 上随机地取值,当观察到 $X = x$ ($0 < x < 1$) 时,数 Y 在区间 $(x, 1)$ 上随机地取值.求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

解 由条件概率密度—》联合概率密度—》边缘概率密度
由题意知 X 具有概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

对于任意给定的值 x ($0 < x < 1$), 在 $X = x$ 的条件下, Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

§ 3.3 条件分布

因此 X 和 Y 的联合概率密度为

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f_{Y|X}(y|x) f_X(x) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \end{aligned}$$

故得 Y 的边缘概率密度

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \\ &= \begin{cases} \int_0^y \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-y), & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \end{aligned}$$

§ 3.3 条件分布

例 已知分布律

$Y \backslash X$	0	1	2
0	$3/28$	$9/28$	$3/28$
1	$3/14$	$3/14$	0
2	$1/28$	0	0

求 $Y=1$ 时 X 的条件分布.

解 由于 $P\{Y=1\} = \frac{3}{14} + \frac{3}{14} + 0 = \frac{3}{7},$

因此,在 $Y=1$ 的条件下 X 的分布律为

$X=2$ 的
情况可
略去

X	0	1	2
$P\{X = x_i Y = 1\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

§ 3.3 条件分布

例 设随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 3x, & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < x, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

求 $P\{Y \leq \frac{1}{8} | X = \frac{1}{4}\}$?

解 因为 $P\{X = \frac{1}{4}\} = 0$,

所以 $P\{Y \leq \frac{1}{8} | X = \frac{1}{4}\} = \frac{P\{X = \frac{1}{4}, Y \leq \frac{1}{8}\}}{P\{X = \frac{1}{4}\}}$ 不存在.

§ 3.3 条件分布

正确解法为

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \\ &= \begin{cases} \int_0^x 3x dy, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 3x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \end{aligned}$$

因此 $0 < x < 1$ 时

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \\ &= \begin{cases} 3x/3x^2 = 1/x, & 0 \leq y < x, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \end{aligned}$$

于是 $P\{Y \leq \frac{1}{8} | X = \frac{1}{4}\}$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\frac{1}{8}} f_{Y|X}(y|\frac{1}{4}) dy \\ &= \int_0^{\frac{1}{8}} 4 dy = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

本章作业

➡ 第一次:

- P_{84} : 2, 3, 4, 7, 9

➡ 第二次:

- P_{85} : 11, 13, 14, 15, 17, 18, 20

➡ 第三次:

- P_{87} : 24, 26, 29, 31, 34, 35, 36