第三章 多维随机变量及其分布

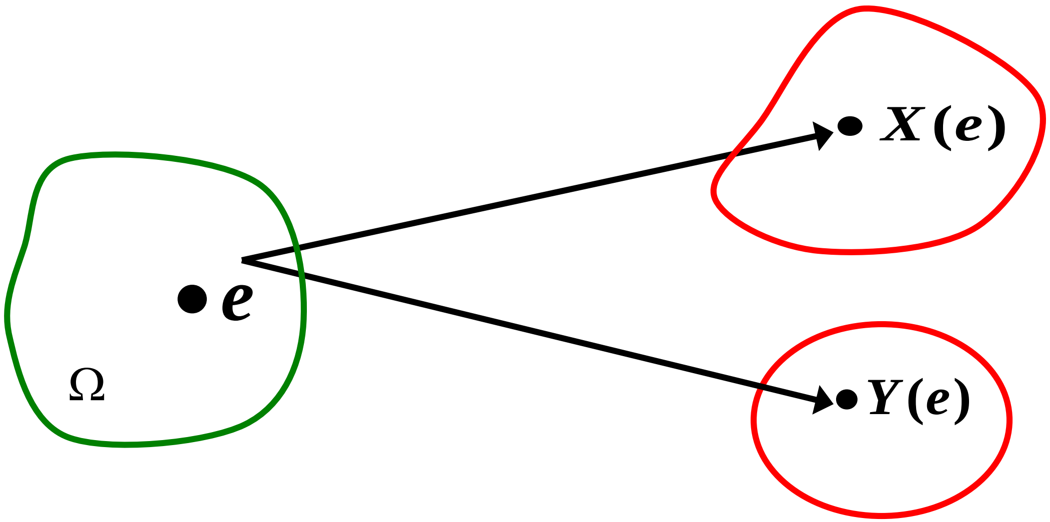
- §3.1 二维随机变量
- §3.2 边缘分布
- §3.3 条件分布
- §3.4 相互独立的随机变量
- §3.5 两个随机变量的函数的分布

第三章 多维随机变量及其分布

- §3.1 二维随机变量
- §3.2 边缘分布
- §3.3 条件分布
- §3.4 相互独立的随机变量
- §3.5 两个随机变量的函数的分布

§ 3.1 二维随机变量

- **定义2.3：** 设E是一个随机试验，它的样本空间是 $S=\{e\}$，设 $X=X(e)$ 和 $Y=Y(e)$ 是定义在S上的随机变量，由它们构成的一个向量(X,Y)，叫做二维随机向量，或二维随机变量



§ 3.1 二维随机变量

实例1 炮弹的弹着点的位置 (X,Y) 就是一个二维随机变量

实例2 考查某一地 区学前儿童的发育情况，则儿童的身高 H 和体重 W 就构成二维随机变量 (H,W)

➲ 两个分量是有内在联系的，因此要将X,Y作为整体来研究

- 其性质与X、Y及X,Y之间的关系均有关，逐个研究X,Y的性质是不够的。

§ 3.1 二维随机变量

二维随机变量分布函数的定义

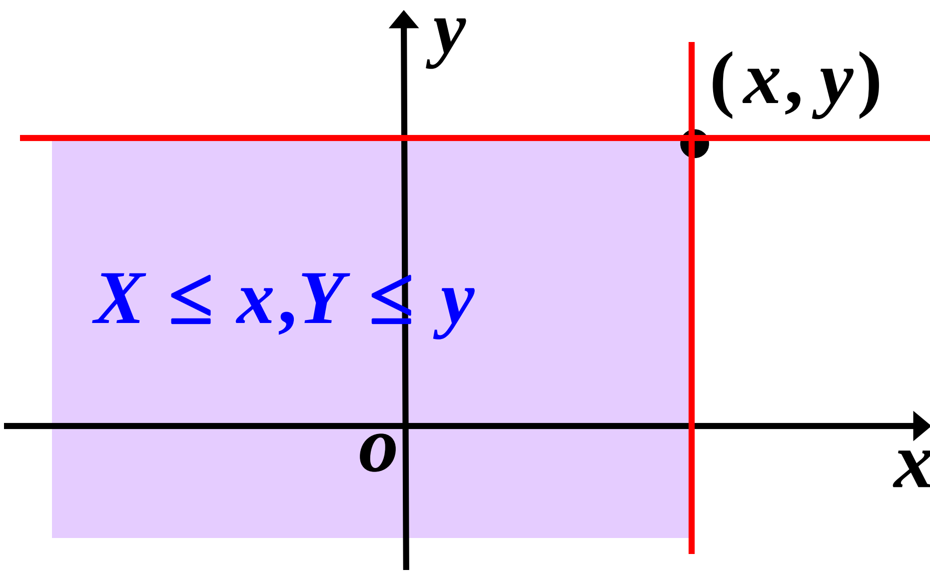
- **定义 设(X,Y)是二维随机变量，对于任意实数x，y，二元函数：**

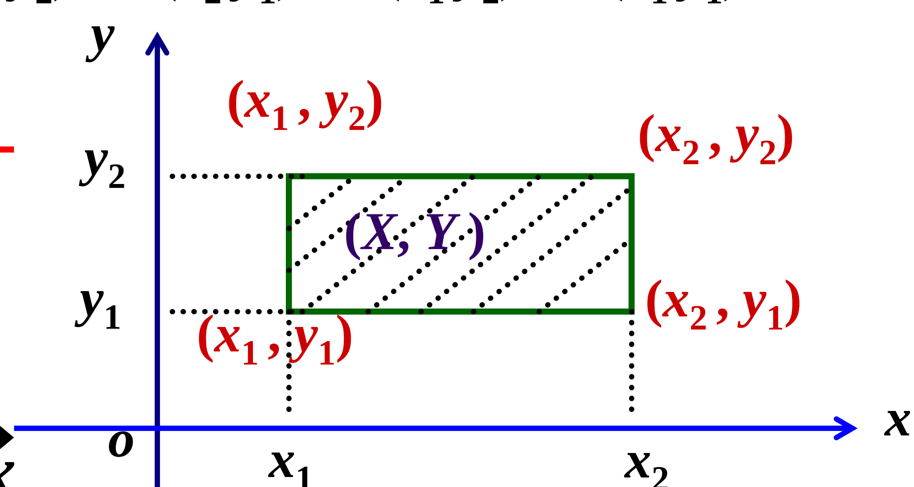
  $F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}$，**记做**$P\{X\le x，Y\le y\}$

  称为二维随机变量(X,Y)的分布函数，或称为随机变量X和Y的联合分布函数。

§ 3.1 二维随机变量

- **二维随机变量分布函数的意义**
  - **将(X,Y)看成是平面上随机点的坐标**，则分布函数$F(x,y)$在点(x,y)处的函数值是随机点(X,Y)落在以(x,y)为顶点的左下方的无穷矩形区域内的概率
  - **随机点落在矩形区域的概率：**
    - $P\{x_1<X\le x_2，y_1<Y\le y_2\}= F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)$





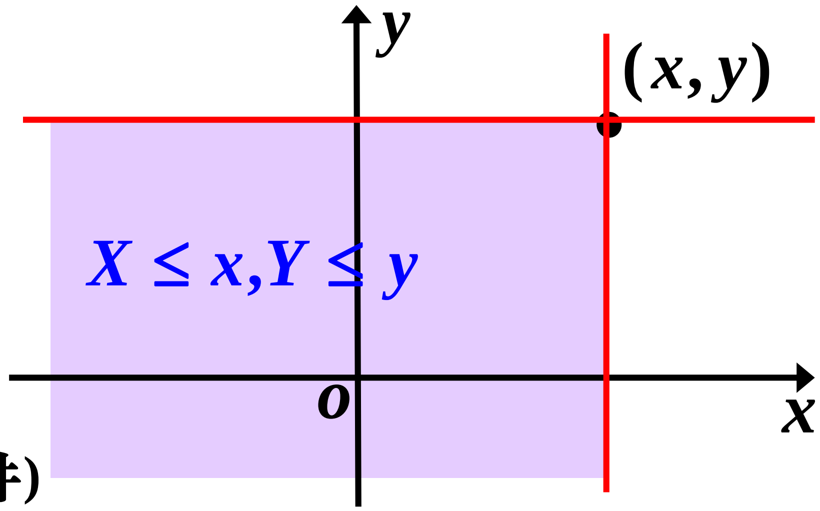
§ 3.1 二维随机变量

分布函数的性质：

1° $F(x,y)$是变量x，y的不减函数 $\begin{cases} \text{对任意的}y\text{，当}x_2>x_1\text{时}F(x_2,y)\ge F(x_1,y) \\ \text{对任意的}x\text{，当}y_2>y_1\text{时}F(x,y_2)\ge F(x,y_1) \end{cases}$

2° $0\le F(x,y)\le 1$且

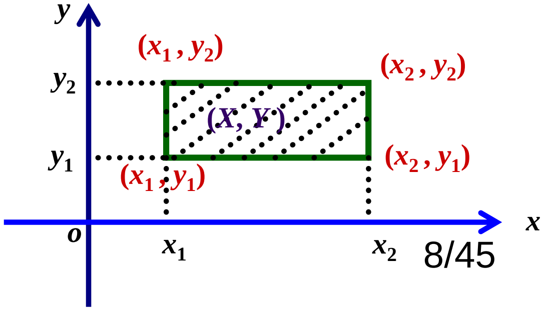
- 对任意固定的y，$F(-\infty, y)=0$
  - (边界无限向左，趋于不可能事件)
- 对任意固定的x，$F(x, -\infty)=0$
  - (边界无限向下，趋于不可能事件)
- $F(-\infty, -\infty)=0$，
  - (边界无限向左下，趋于不可能事件)
- $F(\infty, \infty)=1$，
  - (边界无限向右上，趋于必然事件)



§ 3.1 二维随机变量

- 3° $F(x,y)=F(x+0,y)$，$F(x,y)=F(x,y+0)$
  - $F(x,y)$关于x右连续，关于y也右连续

- 4° 对于任意点(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，$x_1<x_2$，$y_1<y_2$，下述不等式成立：
  - $F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)\geq 0$
  - 矩形区内的概率，及概率非负性



§ 3.1 二维随机变量

- **推广到n维：**
  - **定义：一般，设E是一个随机试验，它的样本空间是$S=\{e\}$，设$X_1=X_1(e)$，$X_2=X_2(e)$，…，$X_n=X_n(e)$是定义在S上的随机变量，由它们构成的一个n维向量$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$叫做n维随机向量，或n维随机变量**
- **分布函数**
  - **定义 设$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$是n维随机变量，对于n个任意实数x_1，x_2，…，x_n，n元函数：**
  - $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=P\{X_1\le x_1,X_2\le x_2,\ldots,X_n\le x_n\}$
  - **称为n维随机变量$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$的分布函数，或称为随机变量$X_1,X_2,\ldots,X_n$的联合分布函数。**
- **具有同二维类似的性质。**

§ 3.1 二维随机变量

- 二维离散型的随机变量：
  - 定义：若二维随机变量(X,Y)全部可能取到的不相同的值是有限对或可列无限多对，则称(X,Y)是离散型随机变量
- 二维离散型随机变量的分布律：
  - 设二维离散型随机变量(X,Y)所有可能取的值为(x_i,y_j)，i，$j=1,2,\ldots$,
  - 记$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$，i，$j=1,2,\ldots$,则由概率的定义有：
  - $$p_{ij}\geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}=1$$
  - 则称$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$，i，$j=1,2,\ldots$为二维离散型随机变量(X,Y)的分布律，或随机变量X和Y的联合分布律。

§ 3.1 二维随机变量

- 也可以用表格的形式给出：

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}		p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

§ 3.1 二维随机变量

- **例1：设随机变量X在1，2，3，4四个整数中等可能地取一个值，另一个随机变量Y在1～X中等可能地取一整数值。试求(X,Y)的分布律。**

- **解：Y的取值与X的取值有关，** i**=1，2，3，4，**j**取不大于**i**的正整数，由乘法定理** $P\{X=i,Y=j\}=P\{Y=j|X=i\}P\{X=i\}=(1/i)(1/4)$，$i=1，2，3，4，1\le j\le i$

Y \ X	1	2	3	4
1	1/4	1/4(1/2)	1/4(1/3)	1/4(1/4)
2	0	1/4(1/2)	1/4(1/3)	1/4(1/4)
3	0	0	1/4(1/3)	1/4(1/4)
4	0	0	0	1/4(1/4)

§ 3.1 二维随机变量

例2 从一个装有3支蓝色、2支红色、3支绿色圆珠笔的盒子里, 随机抽取两支, 若 X、Y 分别表示抽出的蓝笔数和红笔数,求(X,Y)的分布律.

解 (X,Y) 所取的可能值是

(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (0,2), (2,0).

$$P\{X=0,Y=0\}=\binom{3}{2}\Big/\binom{8}{2}=\frac{3}{28},$$

$$P\{X=0,Y=1\}=\binom{2}{1}\binom{3}{1}\Big/\binom{8}{2}=\frac{3}{14},$$

§ 3.1 二维随机变量

$$P\{X=1,Y=1\}=\binom{3}{1}\binom{2}{1}\Big/\binom{8}{2}=\frac{3}{14},$$

$$P\{X=0,Y=2\}=\binom{2}{2}\Big/\binom{8}{2}=\frac{1}{28},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=\binom{3}{1}\binom{3}{1}\Big/\binom{8}{2}=\frac{9}{28},$$

$$P\{X=2,Y=0\}$$

$$=\binom{3}{2}\Big/\binom{8}{2}=\frac{3}{28}.$$

故所求分布律为

$Y \backslash X$	0	1	2
0	$3/28$	$9/28$	$3/28$
1	$3/14$	$3/14$	0
2	$1/28$	0	0

§ 3.1 二维随机变量

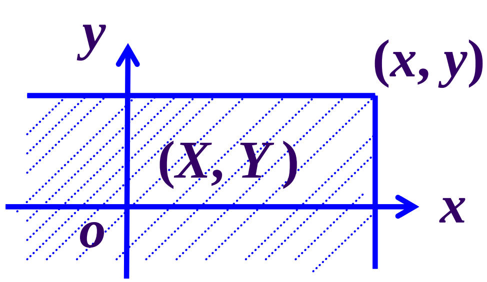
➲ 二维离散型随机变量(X,Y)的分布函数

- 将(X,Y)看作一个随机点的坐标，则离散型随机变量X和Y的联合分布函数为：包含在以(x,y)为顶点的左下方无穷矩形区域内的所有可能取值点的概率的和，即
- $$F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij}$$
- 其中和式是对一切满足$x_i\le x$，$y_j\le y$的i，j来求和的

§3.1 二维随机变量

➲ 二维连续型随机变量的概率密度:

- 对于二维随机变量(X,Y)的分布函数$F(x,y)$，如果存在非负的函数$f(x,y)$，使对任意x,y有
- $$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,du\,dv$$
- 则称(X,Y)是连续型的二维随机变量，函数$f(x,y)$称为二维随机变量(X,Y)的概率密度，或称随机变量X和Y的联合概率密度。



§ 3.1 二维随机变量

$f(x,y)$的性质：

1° 非负性 $f(x,y)\geq 0$

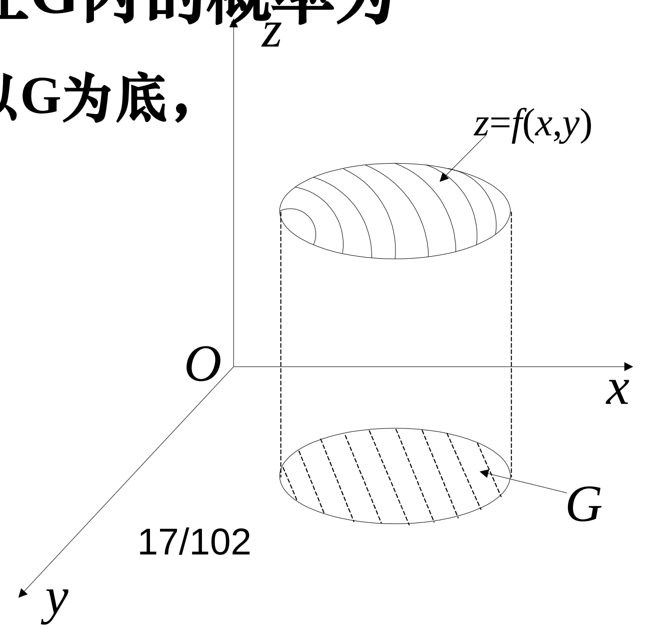
- 曲线$z=f(x,y)$表示一个曲面，位于xOy平面的上方

2° 归一性 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)dudv = F(\infty,\infty)=1$

- 曲面$z=f(x,y)$与xOy平面的空间区域的体积为1

3° 设G是xOy平面上的区域，点(X,Y)落在G内的概率为

- $P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)dxdy$ 在几何上，以G为底，以曲面$z=f(x,y)$为顶的柱体体积



4° 若$f(x,y)$在点(x,y)处连续，则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}=f(x,y)$$

此时的分布函数关于x或y均是连续的

§ 3.1 二维随机变量

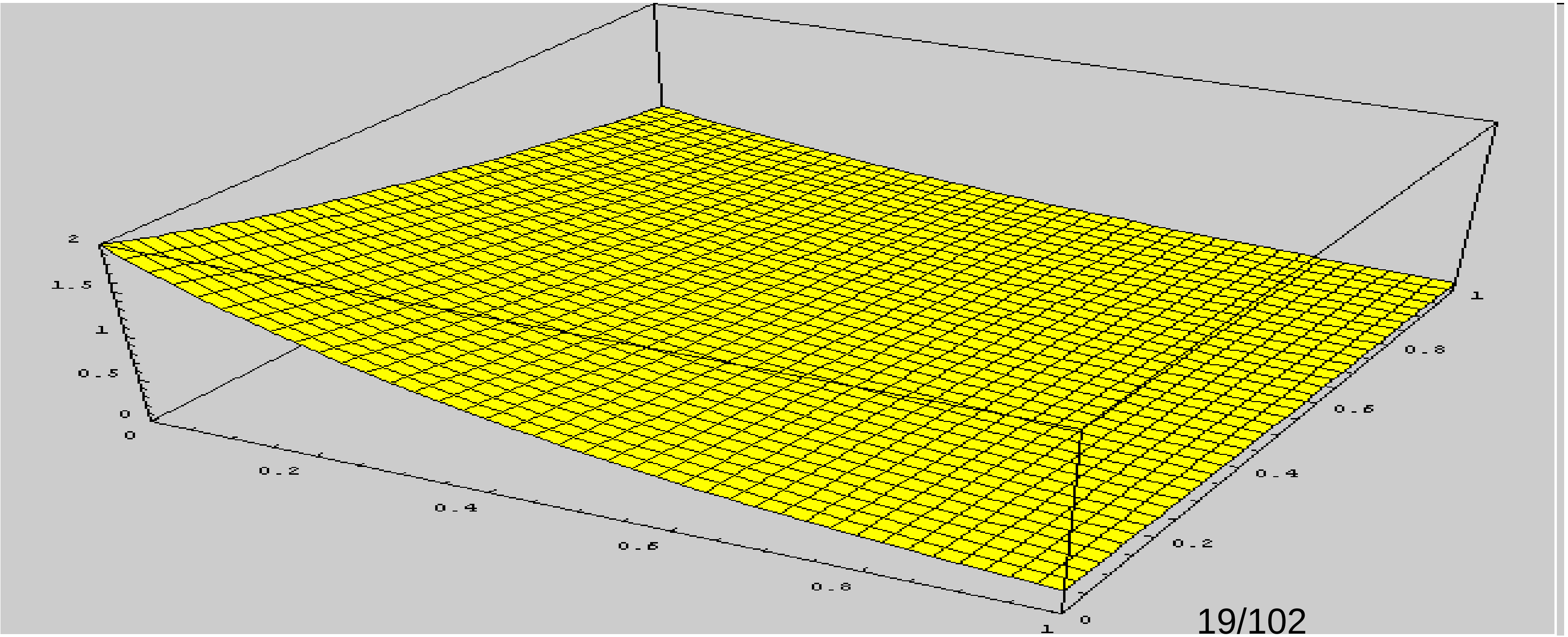
- **面密度的概念：由性质，在*f*(*x*,*y*)的连续点(*x*,*y*)处有**
  - $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0+\\ \Delta y\to 0+}}\dfrac{F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)-F(x,y+\Delta y)+F(x,y)}{\Delta x\Delta y}$
- **由分布函数的定义，分子刚好是落在矩形区域的概率，即**
  - $=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0+\\ \Delta y\to 0+}}\dfrac{P\{x<X\le x+\Delta x,y<Y\le y+\Delta y\}}{\Delta x\Delta y}$
- **当$\Delta x\Delta y$很小时，**
  - $P\{x<X\le x+\Delta x,y<Y\le y+\Delta y\}\approx f(x,y)\Delta x\Delta y$ ，
  - **即随机点落在长方形$(x, x+\Delta x]\times(y, y+\Delta y]$内的概率近似等于长方体的体积，以上比值表明，概率密度为：单位面积上的概率值：面密度**

§ 3.1 二维随机变量

例 设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0,\ y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(1) 求分布函数$F(x,y)$; (2) 求概率$P\{Y\le X\}$.

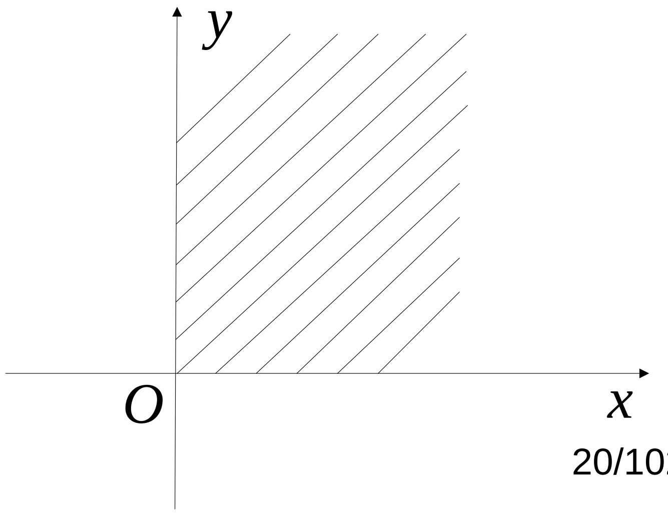


解　(1) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\begin{cases}\int_{0}^{y}\int_{0}^{x} 2e^{-(2x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

得　$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}), & x>0, y>0.\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

先在图像上画出非0区



§ 3.1 二维随机变量

(2) 将 (X,Y)看作是平面上随机点的坐标

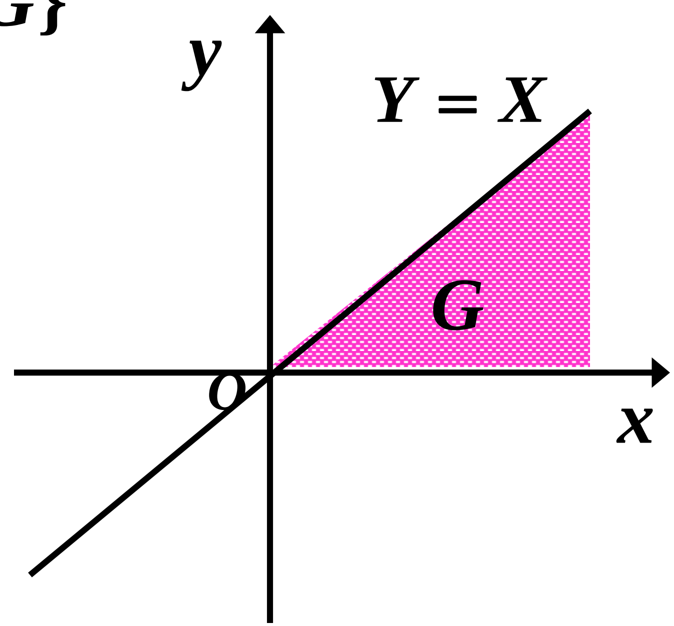
即有 $\{Y \le X\} = \{(X,Y) \in G\}$,

$$P\{Y \le X\} = P\{(X,Y) \in G\}$$

$$= \iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\infty}\int_y^{\infty} 2e^{-(2x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{3}.$$



一般的，涉及到几个随机变量的表达式，在求解概率时就要用几维分布来求解

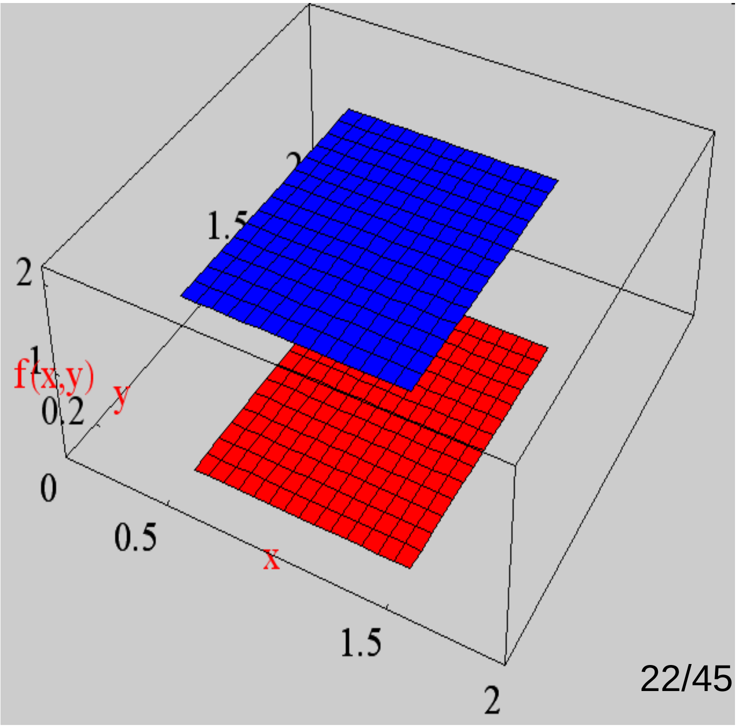
§ 3.1 二维随机变量

两个常用的分布

1.均匀分布

定义 设 D 是平面上的有界区域,其面积为 S,若二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$



则称(X, Y)在 D 上服从均匀分布.

这一是一种几何概型

§ 3.1 二维随机变量

2.二维正态分布

若二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$(-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty),$$

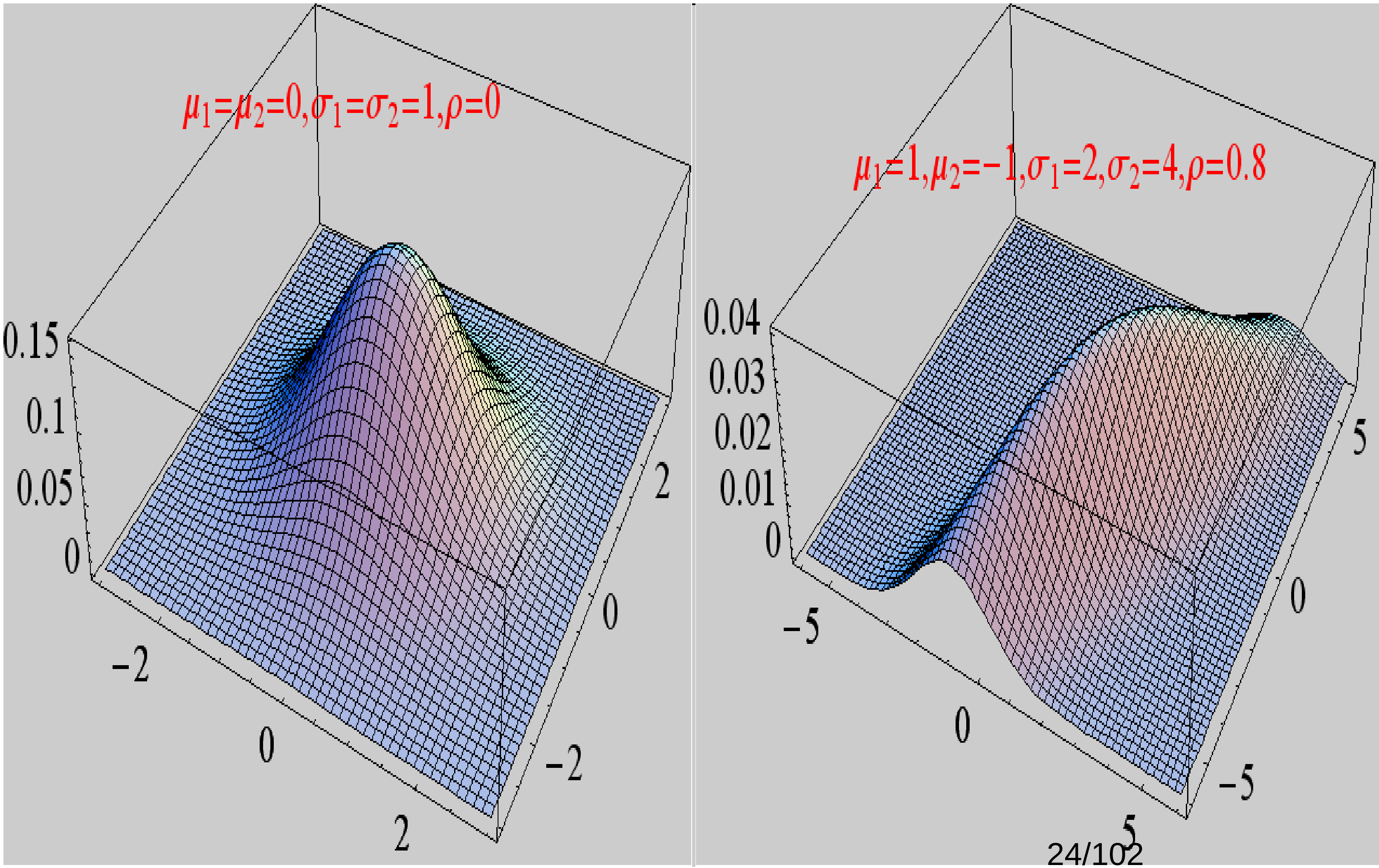
其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$均为常数,且$\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1.$

则称(X,Y)服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的二维正态分布.记为

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

§ 3.1 二维随机变量

二维正态分布的图形



§ 3.1 二维随机变量

例1 设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} k(6-x-y), & 0<x<2,\ 2<y<4, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(1) 确定常数k;　　(2) 求$P\{X<1, Y<3\}$;

(3) 求$P\{X<1.5\}$; (4) $P\{X+Y\le 4\}$.

解　(1) 因为$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1,$

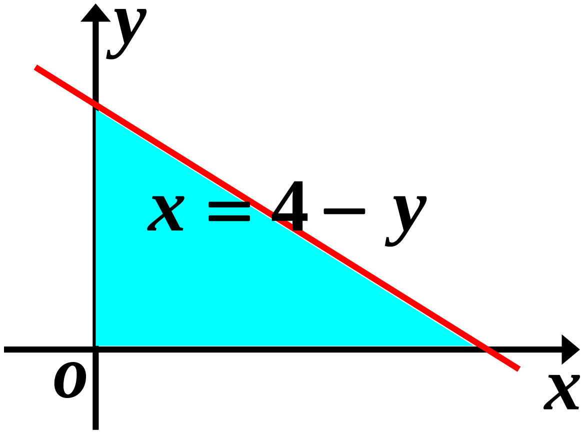
所以$\int_0^2\int_2^4 k(6-x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=1 \Rightarrow k=\dfrac{1}{8};$

$$(2)\ P\{X<1, Y<3\}=\int_0^1\int_2^3 \frac{1}{8}(6-x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\frac{3}{8};$$

$$(3)\ P\{X<1.5\}=\int_0^{1.5}\int_2^4 \frac{1}{8}(6-x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\frac{27}{32};$$

$$(4)\ P\{X+Y\le 4\}=P\{X\le 4-Y\}$$

$$=\int_2^4\int_0^{4-y} \frac{1}{8}(6-x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{2}{3}.$$



第三章 多维随机变量及其分布

- §3.1 二维随机变量
- §3.2 边缘分布
- §3.3 条件分布
- §3.4 相互独立的随机变量
- §3.5 两个随机变量的函数的分布

§ 3.2 边缘分布

- 二维随机变量(X,Y)具有分布函数$F(x,y)$，它描述的是整体的性质，有时我们也要考察X或者Y的个体性质，也就是我们关心的$F_X(x)$，$F_Y(y)$是怎样的？并且分别将$F_X(x)$和$F_Y(y)$称为X和Y的边缘分布函数。

- 边缘分布函数的求解：已知联合分布$F(x,y)$，求解边缘分布$F_X(x)=P\{X\le x\}$

  - 由于$\{Y<\infty\}$是必然事件，所以$\{X\le x\}\cap\{Y<\infty\}=\{X\le x\}$。
  - $\therefore F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{(X\le x)\cap(Y<\infty)\}=P\{X\le x,Y<\infty\}=F(x,\infty)$
  - 同理：
  - $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{(X<\infty)\cap(Y\le y)\}=P\{X<\infty,Y\le y\}=F(\infty,y)$

§ 3.2 边缘分布

※注意：边缘分布律的和式可以理解为一种全概率展开：以Y取值为划分对X取值的全概率展开。

离散型随机变量的边缘分布律：

- (X,Y)的分布函数为$F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_{ji}\le y} p_{ij}$
- 则$F_X(x)=F(x,\infty)=\sum_{x_i\le x}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}=\sum_{x_i\le x}(\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij})$，
  - 与第二章分布律与分布函数的关系式进行比较，括号内的部分即为$P\{X=x_i\}$
- 所以
  - X的分布律为$P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}=p_{i\cdot}$，$i=1，2，\ldots$
- 同理
  - Y的分布律为$P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}=p_{\cdot j}$，$j=1，2，\ldots$

§3.2 边缘分布

- 分别称$p_{i\cdot}$ (i＝1，2，…)和$p_{\cdot j}$ (j＝1，2，…)为(X,Y)关于X和关于Y的边缘分布律。

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	$p_{\cdot j}$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$	
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		
$p_{i\cdot}$						

$$P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij},\ i = 1,2,\cdots;$$

$$P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij},\ j = 1,2,\cdots.$$

§ 3.2 边缘分布

离散型随机变量关于X和Y的边缘分布函数分别为

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\sum_{x_i\le x}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij},$$

$$F_Y(y)=F(\infty,y)=\sum_{y_j\le y}\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}.$$

§ 3.2 边缘分布

例1 已知下列分布律求其边缘分布律.

解

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\bullet j} = P\{Y = y_j\}$
0	$\frac{12}{42}$ +	$\frac{12}{42}$	$\frac{4}{7}$
1	+ $\frac{12}{42}$ +	+ $\frac{6}{42}$	$\frac{3}{7}$
$p_{i\bullet} = P\{X = x_i\}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

注意 联合分布 $\longrightarrow$ 边缘分布

边缘分布 $\not\longrightarrow$ 联合分布

§ 3.2 边缘分布

➲ 连续型随机变量的边缘概率密度：

- (X,Y)的概率密度函数为$f(x,y)$，
- $F_X(x)=F(x,\infty)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{x}[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy]dx$
- 与概率密度函数定义相比较
- 得，X是连续型随机变量，且$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$
- 同样，Y是连续型随机变量，且$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$
- 分别称$f_X(x)$和$f_Y(y)$为随机变量(X,Y)关于X和关于Y的边缘概率密度

§ 3.2 边缘分布

例2 设随机变量X和Y具有联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

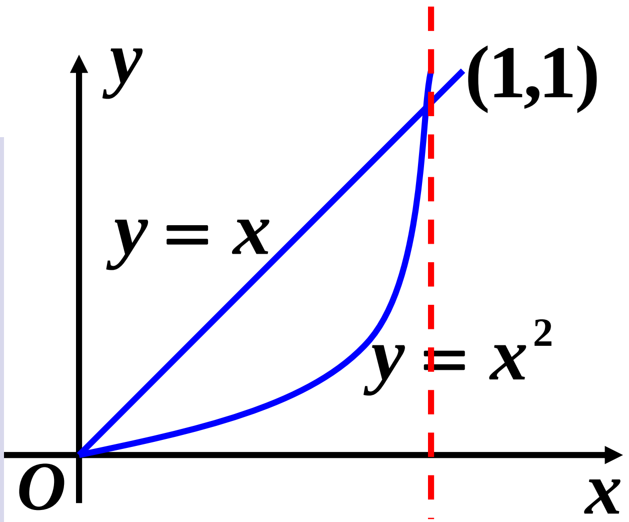
求边缘概率密度$f_X(x), f_Y(y)$.

由边缘概率密度定义

首先确定积分区域包括x的范围和y的积分限

解 $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

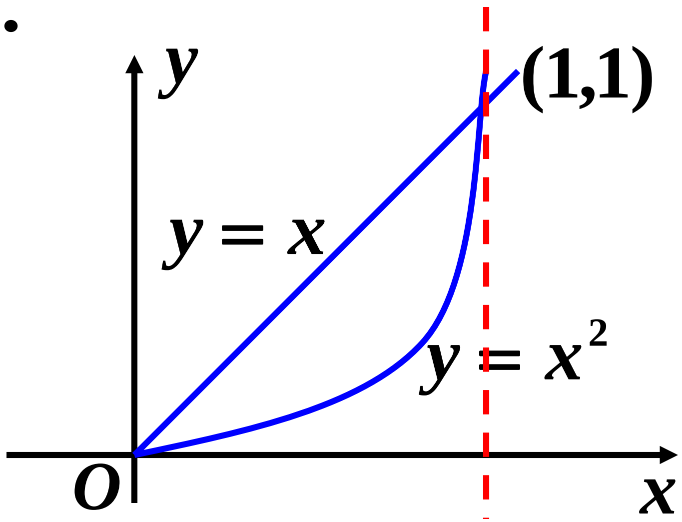
- 通过 $f(x,y)$中关于x和y的约束关系求得x的取值范围，及y的积分区间，即由$x^2\le y\le x$，可推导出$0\le x\le 1$，y的积分区间是x的函数$[x^2, x]$
  - 或者画出积分区域，从而确定x和y的范围：



§ 3.2 边缘分布

当 $0 \le x \le 1$ 时,

$$f_X(x) = \int_{x^2}^{x} 6\,\mathrm{d}y = 6(x - x^2).$$



当 $x < 0$ 或 $x > 1$ 时,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

因而得 $$f_X(x) = \begin{cases} 6(x - x^2), & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

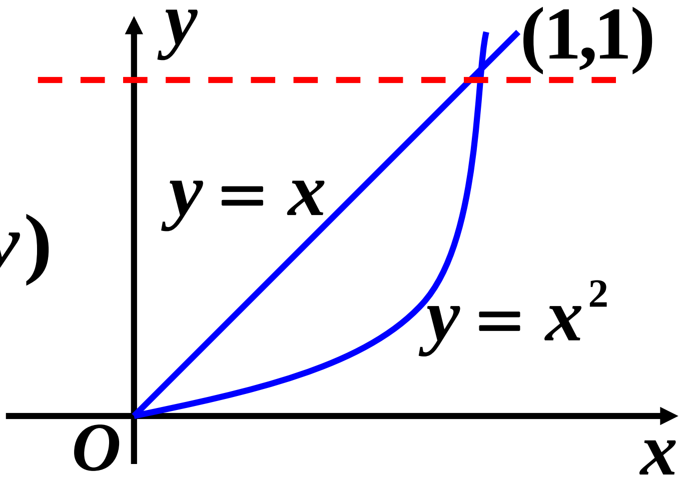
§ 3.2 边缘分布

当 $0 \le y \le 1$ 时,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{y}^{\sqrt{y}} 6\,\mathrm{d}x = 6(\sqrt{y} - y)$$

$$= 6(\sqrt{y} - y).$$



当 $y < 0$ 或 $y > 1$ 时,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x = 0.$$

得 $$f_Y(y) = \begin{cases} 6(\sqrt{y} - y), & 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$