概率论与数理统计

主讲教师： 朱丽娜　讲师

研究方向： 智能交通，车联网与智能驾驶

电子邮件： lnzhu@xidian.edu.cn

个人主页： http://web.xidian.edu.cn/lnzhu/

第一章 概率论的基本概念

§1.5 条件概率

- (二) 乘法定理 （条件概率的推论）
- 乘法定理：设$P(A)>0$，则有$P(AB)=P(A)P(B|A)$
- 推广到三个事件的情况：设有A,B,C三个事件，且$P(AB)>0$，于是：
  - $P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)$
  - 注意：如果$P(AB)>0$，则必有$P(A)>0$及$P(B)>0$
- 推广到更多个的情况
  - 设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个事件，n≥2，且$P(A_1A_2\ldots A_{n-1})>0$，则有
  - $P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1A_2\ldots A_{n-2})\ldots P(A_2|A_1)P(A_1)$

- 乘法定理解决积事件的概率问题，可借助排列组合中的乘法定理来理解概率中的乘法定理
- 乘法定理主要解决那些一项任务分多个步骤的情况，把每个步骤的概率相乘就得到完成该事件的概率

§ 1.5 条件概率

- 例3：袋中装有r只红球、t只白球，每次从袋中任取一只观察颜色后放回，再放入a只与所取球同色的球。若连续取球四次，求第一、二次取到红球且第三、四次取到白球的概率
- 解：设A_1, A_2, A_3, A_4分别为每次取到红球的事件
  - 取球时：有次序，放回抽样，有添加
  - 则要求的概率是一个积事件的概率$P(A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4})$
  - 而依据取球的顺序及有添加的情况，按乘法公式从A_1开始展开
  - $P(A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(\overline{A_3}\mid A_1A_2)P(\overline{A_4}\mid A_1A_2\overline{A_3})$
  - $= \dfrac{r}{r+t}\times\dfrac{r+a}{r+t+a}\times\dfrac{t}{r+t+2a}\times\dfrac{t+a}{r+t+3a}$
  - 显然，按以上展开顺序，每一个条件概率均可容易求出

§1.5 条件概率

- 例4：设某光学仪器厂制造的透镜，第一次落下时打破的概率为1/2，若第一次落下未打破而第二次落下打破的概率为7/10，若前两次落下未打破而第三次落下打破的概率为9/10，试求透镜三次落下而未打破的概率
- 解：首先分析一下所求的问题
  - 设 事件A：第一次落下打破；
  - 事件B：第二次落下打破；
  - 事件C：第三次落下打破。
  - 则所求的概率为$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})$
  - 题设条件为$P(A)=1/2$，$P(B|\overline{A})=7/10$，$P(C|\overline{A}\overline{B})=9/10$
  - 用乘法定理$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A})P(\overline{C}|\overline{A}\overline{B})$
  - $=(1-P(A)(1-P(B|\overline{A})(1-P(C|\overline{A}\overline{B}))$
  - $=3/200$
  - 也可以先求 $\overline{D}=A\cup\overline{A}B\cup\overline{A}\overline{B}C$ 由于这三次打破是两两互不相容的事件，因此根据有限可加性 $P(\overline{D})=P(A)+P(\overline{A}B)+P(\overline{A}\overline{B}C)$ 进而由乘法定理展开可得结果

§1.5 条件概率

(三) 全概率公式和贝叶斯公式

(1) 全概率公式:

- 对应排列组合中的加法，完成一项任务有多种可能的并行情况，这些情况的数目的和就是完成该任务的所有可能情况
- 对样本空间适当分解的思想，有利于解决稍微复杂一点的概率问题

首先看一下关于划分的概念

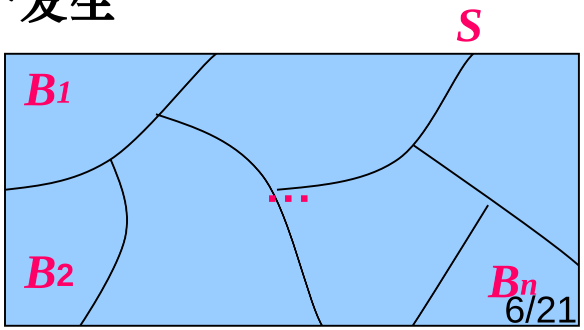
定义：设S为试验E的样本空间，B_1，B_2，…，B_n为E的一组事件。若

- (i) $B_iB_j=\Phi$，$i\neq j$，i，$j=1$，2，…，n；
- (ii) $B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_n=S$
- 则称B_1，B_2，…，B_n为S的一个划分。

※每次试验，事件B_1，B_2，…，B_n中有且仅有一个发生

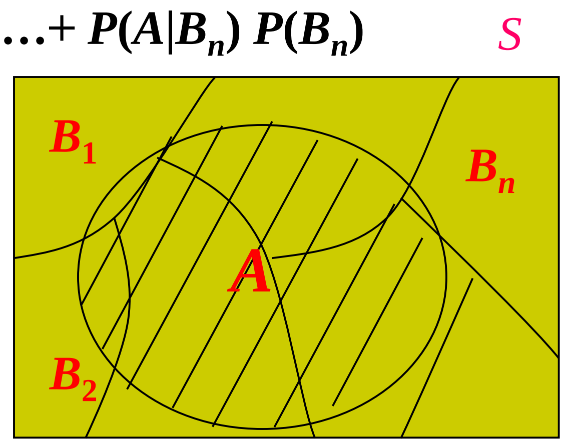
例：S={1，2，3，4，5，6}则划分正确的是

- $B_1=\{1，2，3\}$ $B_2=\{4，5\}$ $B_3=\{6\}$
- $B_1=\{1，2，3\}$ $B_2=\{3，4\}$ $B_3=\{5，6\}$



§ 1.5 条件概率

- **全概率公式：设E的样本空间为S，A为E的事件，B_1，B_2，…，B_n为S的一个划分，且$P(B_i)>0$（i＝1，2，…，n），则**
  - $P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+\dots+P(A|B_n)P(B_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$
- **证：** $P(A)=P(AS)=P(A(B_1\cup B_2\cup\dots\cup B_n))$
  - 由分配律 $=P(AB_1\cup AB_2\cup\dots\cup AB_n)$
  - 而对任意的$i\neq j$，i，$j=1$，2，…，n，有$(AB_i)(AB_j)=AB_iB_j=\Phi$
  - 由有限可加性 $=P(AB_1)+P(AB_2)+\dots+P(AB_n)$
  - 又$P(B_i)>0$，由乘法定理上式展开得
  - $=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\dots+P(A|B_n)P(B_n)$



- **在全概率公式中要注意一下几点：**
  - 1）条件$P(B_i)>0$，划分不能是空集
  - 2）B_1，B_2，…，B_n正好覆盖S中的所有元素
  - 3）在应用上，那些不便直接求某一事件的概率时，先找到一个合适的划分，再用全概率公式计算

§1.5 条件概率

- 2．贝叶斯(Bayes)公式 (计算后验概率问题)
  - 事件A的发生，iff构成S划分的事件B_1，B_2，…，B_n中的一个发生时才发生，一般在实验之前仅知道B_i的先验概率，那么如果试验后事件A已经发生了，B_i发生的概率又是多少呢？这种问题我们称他为后验概率问题，有利于我们查找事件发生的原因。解决此类问题可采用贝叶斯(Bayes)公式

- 贝叶斯(Bayes)公式
  - 设E的样本空间为S，A为E的事件， B_1，B_2，…，B_n为S的一个划分，且$P(A)>0$，$P(B_i)>0$（i＝1，2，…，n），则
  - $P(B_i|A)=\dfrac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)}$， i＝1，2，…，n

- 证：由条件概率公式$P(B_i|A)=P(B_iA)/P(A)$，再用乘法定理和全概率公式对分子分母展开即得所求。
- $P(B_i)$是以往的数据分析得到的，称为先验概率
- $P(B_i|A)$是得到信息之后再重新加以修正的概率，叫做后验概率

§1.5 条件概率

- **例6：对以往数据分析结果表明：**
  - **当机器调整良好时，　产品合格率为98%**
  - **当机器发生某一故障时，产品合格率为55%**
  - **每天早上机器开动时，调整良好的概率为95%**
- **试求：已知某日早上第一件产品是合格产品时，机器调整得良好的概率?**
- **解：设事件A：产品合格**
- **事件B：机器调整良好；　$\bar{B}$：机器出现故障**
  - **由题意：$P(B)=95\%$，$P(\bar{B})=5\%$**
  - **$P(A|B)=98\%$，$P(A|\bar{B})=55\%$**
  - **$P(B|A)=\dfrac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}=0.97$**
- **注意：$P(B)=95\%$是以往的数据分析得到的，称为先验概率**
  - **$P(B|A)=0.97$是得到信息（第一件产品是合格品）之后再重新加以修正的概率，叫做后验概率。通过后验概率可以进一步了解机器的情况**

§1.5 条件概率

- 例：习题38
  - 袋中装有m只正品硬币，n只次品硬币，次品硬币系指两面均印有国徽。
  - 在袋中任取一只，将它投掷r次，已知每次都得到国徽，问这只硬币是正品的概率是多少?
  - 解：由题述这是典型的采用贝叶斯公式的题目
  - 设：事件A：取到的是正品；事件$\overline{A}$：取到的是次品
  - B为r次投掷得到国徽；求$P(A|B)$
  - $P(A|B)=\dfrac{P(A)P(B\mid A)}{P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})}$
  - $P(A)=\dfrac{m}{m+n},P(\overline{A})=\dfrac{n}{m+n}$，$P(B|\overline{A})=1$，$P(B|A)=(1/2)^r$
  - 带入得$P(A|B)=\dfrac{m}{m+n2^r}$

§ 1.6 独立性

- 在条件概率$P(B|A)$中，一般情况下，事件A的发生对事件B的发生是有影响的，即在很多情况下$P(B|A)\neq P(B)$，在有些情况下，这种影响是不存在的
  - 即 $P(B|A)=P(B)$
  - 这时$P(AB)=P(B|A)P(A)=P(B)P(A)$
- 这样的情况用独立性这一概念来描述
- 定义 设A，B是两事件，如果具有等式
  - $P(AB)=P(B)P(A)$
  - 则称事件A，B相互独立，简称A，B独立

事实上，由对称性知，两次抛币是互不干涉的，因此甲是否正面和乙是否正面互不影响

- 例1：　设试验E为“抛甲乙两枚硬币，观察正反面出现的情况”
  - 设事件A：甲币出现正面；　事件B：乙币出现正面。看一下独立性。
- 分析：
  - S={HH，HT，TH，TT}；　A={HH，HT }　B={ HH，TH }
  - $\therefore P(A)=1/2$　$P(B)=1/2$　$P(AB)=1/4$　$P(B|A)=1/2$
  - $\therefore P(B)=P(B|A)$　$P(AB)=P(B)P(A)$

§ 1.6 独立性

- **独立性的相关性质：**
  - **若P(A)>0，P(B)>0，则A，B相互独立与A，B互不相容不能同时成立**
  - **因为如果互不相容则0＝$P(AB)$，如果又满足相互独立则$P(AB)$＝$P(B)P(A)$>0。矛盾。**
- **定理一 设A，B是两事件，且P(A)>0，若A，B相互独立，则$P(B|A)=P(B)$，反之亦然。（由定义可直接证得）**
- **定理二 若事件A，B相互独立，则下列各对事件也相互独立。**

  A与$\overline{B}$，$\overline{A}$与B，$\overline{A}$与$\overline{B}$

- **证：**$A=A(B\cup\overline{B})=AB\cup A\overline{B}$
  - $\therefore P(A)=P(AB\cup A\overline{B})=P(AB)+P(A\overline{B})$
  - $\therefore P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=P(A)-P(B)P(A)=P(A)(1-P(B))=P(A)P(\overline{B})$
  - $\therefore A$与$\overline{B}$ **相互独立**
  - 又$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A}\,|\,\overline{B})P(\overline{B})=(1-P(A\,|\,\overline{B}))P(\overline{B})=(1-P(A)P(\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})$
  - $\therefore\overline{A}$与$\overline{B}$**也相互独立**

§ 1.6 独立性

- **推广：三个事件的情况**
- **定义：设A，B，C是三个事件，如果满足等式**

$$\left.\begin{aligned} P(AB)&=P(A)P(B),\\ P(BC)&=P(B)P(C),\\ P(AC)&=P(A)P(C),\\ P(ABC)&=P(A)P(B)P(C),\end{aligned}\right\}$$

  - **则称事件A，B，C相互独立。**
- **注意：仅满足前三个等式的三个事件称为两两相互独立 见习题33**
- **当然，如果事件A，B，C相互独立**
  - **则 $A,\overline{B},C$； $A,B,\overline{C}$； …； $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 也相互独立**
- **推广到多个事件**
  - **一般的，设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个事件，n≥2，如果对于其中的任意两个，任意3个，…，任意n个事件的积事件的概率，都等于各事件概率之积，则称事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$相互独立。**
  - **包含的等式的个数：** $C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=(1+1)^n-C_n^1-C_n^0=2^n-n-1$

在实际应用中，对于事件的独立性常常根据事件的实际意义来判断，如果两个事件关联很弱也可以看作是独立的。

由定义可以得到以下两点推论：

1.若事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$相互独立，n≥2，则其中任意k(2≤k≤n)个事件也是相互独立的。

2.若n个事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$(n≥2)相互独立，则将$A_1, A_2, \ldots, A_n$中任意多个事件换成他们的对立事件，所得的n个事件仍相互独立

§ 1.6 独立性

- **例：甲、乙两人进行乒乓球比赛，每局甲胜的概率为*p*，*p*≥1/2，对甲而言，采用三局两胜制有利，还是采用五局三胜制有利？设各局胜负相互独立。**

解：设$A_i=\{第i局甲胜\} \Rightarrow P(A_i)=p,\ i=1,2,\cdots,5$

再设$A=\{甲胜\}$

(1) 三局二胜制：

$$P(A)=P\left(A_1A_2\cup A_1\bar{A}_2A_3\cup\bar{A}_1A_2A_3\right)=p^2+2p^2(1-p)\doteq p_1$$

(2)五局三胜制：

$$P(A)=P\{A_1A_2A_3\cup(前三次有一次输)A_4\cup(前四次有两次输)A_5\}$$

$$=p^3+C_3^1(1-p)p^3+C_4^2(1-p)^2p^3\doteq p_2$$

$$P_2-P_1=3P^2(P-1)^2(2P-1)\ \Rightarrow\ \begin{cases} p_2>p_1,\ 当p>\dfrac{1}{2} \\ p_2=p_1,\ 当p=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

本章小结（一）

随机现象　　统计规律性

随机试验

1.相同条件下可重复进行；
2.每次试验可能结果不止一个，<u>但可以预知所有可能结果</u>；
3.每次试验前不能预知哪一个结果出现

样本空间 **S** (最基本的概念) —(映射)→ 随机变量 **X** (单值实值函数) —(取值)→ 总体 **N** (取自X的全部可能试验观察值)

随机事件 (子集，f，S，基本事件)

随机事件 (子集)

部分个体 (简单随机样本)

概率空间(样本空间S, 事件域F, 事件的概率P)

事件间的关系和运算

- 关系：包含，相等，和事件，积事件，差事件，互不相容，逆事件(对立事件)
- 描述：元素考察法；韦恩图法
- 运算：交换律；结合律；分配律；德·摩根律

本章小结（二）

频率的稳定值(伯努利大数定律)

↓

概率的公理化定义
- 1° 非负性；2° 规范性；3° 可列可加性
- 1° $P(\Phi)=0$；2° 有限可加性 $P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$；
- 3° 包含关系 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，$P(B)\geq P(A)$；
- 4° $P(A)\leq 1$；5° $P(\overline{A})=1-P(A)$；
- 6° 加法公式 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

↓

概率的计算
- 1° 随机变量及其分布
- 2° 古典概型　至少… ;放回和不放回抽样;超几何分布;抽签问题;生日问题
- 3° 几何概型
- 4° 小概率事件和实际推断原理　　参数估计和假设检验等的原理

↓

条件概率
- 1° 定义　$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，$P(A)>0$，相当于样本空间为$SA$
- 2° 乘法定理　设$P(A)>0$，则有$P(AB)=P(A)P(B|A)$
- 3° 全概率公式　(i) $B_iB_j=\Phi$，$i\neq j$，i，$j=1$，2，…，n；　划分

  (ii) $B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_n=S$

  $P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\ldots+P(A|B_n)P(B_n)$
- 4° 贝叶斯公式　后验概率

  $P(B_i|A)=\dfrac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)}$，$i=1$，2，…，n

独立性，n个事件的独立性和两两相互独立

随堂习题

- **习题1：设A,B为两个已知事件，**
  - **事件X满足** $\overline{A \cup X} \cup \overline{X \cup \overline{A}}$ **=*B*，求*X***
- **习题2：盒中有N只从1到N进行编号的球，现在有放回的取回n只球，问这n次取球的号码按升序排列的概率是多少? n ≤ N**
  - **考虑两种情况(i) 严格升序，(ii)非严格升序**
- **习题3：甲乙丙三人同时对飞机射击，且相互独立**
  - **甲的击中概率为0.4；乙的击中概率为0.5；丙的击中概率为0.7；**
  - **飞机被一人击中而击落的概率0.2; 飞机被二人击中而击落的概率0.6; 飞机被三人击中而击落的概率1;**
  - **求飞机被击落的概率**

随堂习题

- 例：设A,B为两个已知事件，
  - 事件X满足$\overline{A\cup X}\cup\overline{X\cup\overline{A}}=B$，求$X$
- 解：
  - 利用德•摩根率，左边=$\overline{(A\cup X)\cap(X\cup\overline{A})}$
  - 再利用分配率，左边=$\overline{X\cap(A\cup\overline{A})}=\overline{X\cap S}=\overline{X}$
  - 所以$X=\overline{B}$
- 例 (A-B)∪B=?

随堂习题

- **例：盒中有N只从1到N进行编号的球，现在有放回的取回n只球，问这n次取球的号码按升序排列的概率是多少？n≤N**
  - **考虑两种情况(i) 严格升序，(ii)非严格升序**
- **解： (i)严格升序 p＝C_N^n/N^n**
  - **(ii)非严格升序**
  - **按升序的含义，重复的球是连续出现的，从1到N这N个球按升序排放后，每取一个球在该球后面放一个标记，如果是重复t次选取就在该球后放t个标记，这样相当于在N个球后面共插入n个标记。**
  - **这样相当于在N－1个球＋n个标记的N－1＋n个位置上任意选n个位置作为标记，其余球按升序恰好填满其它位置，1号球总是在第一个位置上**

$$C_{N-1+n}^{n}$$

随堂习题

- **例：甲乙丙三人同时对飞机射击，且相互独立**
  - **甲的击中概率为0.4；乙的击中概率为0.5；丙的击中概率为0.7；**
  - **飞机被一人击中而击落的概率0.2; 飞机被二人击中而击落的概率0.6; 飞机被三人击中而击落的概率1;**
  - **求飞机被击落的概率**
- **解：由题意，令B_0，B_1，B_2，B_3分别为无人击中、被一人击中、被两人击中、被三人击中的事件，则关于三人射击击中情况B_0，…，B_3构成样本空间的一个划分，事件A为飞机被击落的概率$P(A)$，则由全概率公式**
  - $P(A)=P(A|B_0)\,P(B_0)+P(A|B_1)\,P(B_1)+P(A|B_2)\,P(B_2)+P(A|B_3)\,P(B_3)$
  - **现在$P(A|B_1)=0.2$，$P(A|B_2)=0.6$，$P(A|B_1)=1$，只需求$P(B_1)$，$P(B_2)$，$P(B_3)$**
  - $B_1=(\text{甲}\overline{\text{乙}}\,\overline{\text{丙}})\cup(\overline{\text{甲}}\,\text{乙}\overline{\text{丙}})\cup(\overline{\text{甲}}\,\overline{\text{乙}}\,\text{丙})$ **甲乙丙射击是相互独立的，所以**
  - $P(B_1)=P((\text{甲}\overline{\text{乙}}\,\overline{\text{丙}})\cup(\overline{\text{甲}}\,\text{乙}\overline{\text{丙}})\cup(\overline{\text{甲}}\,\overline{\text{乙}}\,\text{丙}))$
  - $=P(\text{甲})P(\overline{\text{乙}})P(\overline{\text{丙}})+P(\overline{\text{甲}})P(\text{乙})P(\overline{\text{丙}})+P(\overline{\text{甲}})P(\overline{\text{乙}})P(\text{丙})$
  - **同理可求得$P(B_2)$，$P(B_3)$**

本章作业

- 第一次：P_{24} 1，2，3，4
-
- 第二次：P_{25} 5, 7, 8, 12, 14, 19, 24
-
- 第三次：P_{27} 27, 29, 30, 31, 35, 37, 40