概率论与数理统计

主讲教师：朱丽娜　讲师

研究方向：智能交通，车联网与智能驾驶

电子邮件：lnzhu@xidian.edu.cn

个人主页：http://web.xidian.edu.cn/lnzhu/

第一章 概率论的基本概念

§1.4 等可能概型（古典概型）

- 先看两个试验：
  - 抛一枚硬币，观察其H，T出现的情况；S={H，T}
  - 抛一枚骰子，观察其出现的点数；S＝{1，2，3，4，5，6}

- 这些试验有两个明显特点：
  - （1）S中的元素只有有限个；
  - （2）试验中每个基本事件发生的可能性相同。

- 这样的试验大量存在，称为等可能概型
  - 由于它是概率论发展初期的研究对象，又叫古典概型。

§1.4 等可能概型（古典概型）

- 古典概型试验中事件发生的概率计算公式：
- 设试验E的样本空间为$S=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$，由于每个基本事件发生的可能性相同，即有
  - $P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\ldots=P(\{e_n\})$
  - 又由于基本事件是两两不相容的
  - 所以$1=P(S)=P(\{e_1\}\cup\{e_2\}\cup\ldots\cup\{e_n\})=nP(\{e_i\})$，$i=1,2,\ldots,n$
  - 即$P(\{e_i\})=1/n$, $i=1,2,\ldots,n$
- 若事件A包含k个基本事件，即$A=\{e_{i_1}\}\cup\{e_{i_2}\}\cup\ldots\cup\{e_{i_k}\}$，$i_1$，$i_2$，…，$i_k$是1到$n$中某$k$个不同的数，则有
  - $$\boxed{P(A)=\sum_{j=1}^{k}P(\{e_{i_j}\})=\frac{k}{n}=\frac{A\text{中包含的基本事件数}}{S\text{中包含的基本事件数}}}$$

§1.4 等可能概型（古典概型）

- **例1．古典概型的一般问题**
  - 一枚硬币抛三次
  - (i) 设事件A_1：恰有一次出现正面，求$P(A_1)$
  - (ii)设事件A_2：至少有一次出现正面，求$P(A_2)$
- **解：首先正确给出样本空间**
  - S={HHH，HHT，HTH，HTT，THH，THT，TTH，TTT}
- **(i) 事件A_1={HTT，THT，TTH }**
  - 分析：S中只有有限个元素，由对称性可知
  - 每个基本事件发生的可能性相同——等可能概型
  - $\therefore P(A_1)=3/8$
- **(ii)先看A_2的逆事件$\overline{A_2}$={TTT}**
  - $P(A_2)=1-P(\overline{A_2})=1-1/8=7/8$

1.等可能概型的判断可根据对称性来考虑一般的排列组合问题都是古典概型
2.对于“至少…”通常先考察其逆事件

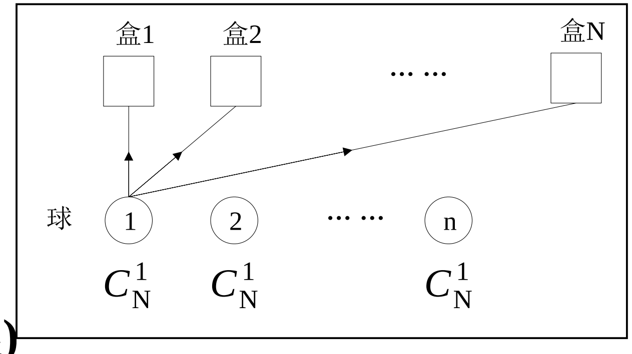
§1.4 等可能概型（古典概型）

- 例2：放回抽样与不放回抽样
  - 一只口袋有6只球：4只白的，2只红的。从袋中取球两次，每次随机取一只，考虑两种取球方式：
  - 放回抽样：第一次取一只球，观察颜色后放回袋中，搅匀后再取一只
  - 不放回抽样：第一次取一只球不放回袋中，第二次从剩余球中再取一只
  - 分别就以上两种方式求：
  - (i)取到的两只球都是白球的概率；
  - (ii)取到的两只球颜色相同的概率；
  - (iii)取到的两只球中至少有一只是白球的概率。
- 解：(a)放回抽样的情况
  - 启示：恰当的利用事件间的关系可以简化求解
  - 设事件A：取到的两只都是白球；事件B：取到的两只都是红球；事件C：至少一白
  - 则 (i) 相当于求$P(A)$；(ii) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$；
  - (iii) $P(C)=P(\overline{B})=1-P(B)$
  - 所以只要求出事件A和事件B的概率就行了
- 分析：依次从袋中取两球，每一取法为一个基本事件。又样本空间中的元素有限，由对称性每个基本事件发生的可能性相同：等可能概型
- ①计算S中元素的个数：第一次6球，第二次6球，由组合乘法原理，
  - 共有6×6＝36种
- ②A：两次都有4只白球可取，共有4×4＝16种
- ③B：两次都有2只红球可取，共有2×2＝4种
- ∴由古典概型公式：
  - $P(A)=16/36=4/9$
  - $P(B)=4/36=1/9$
  - $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=4/9+1/9=5/9$
  - $P(C)=P(\overline{B})=1-P(B)=1-1/9=8/9$

分数不可随意化成小数，除非有保留精度

- (b)不放回抽样的情况
  - S：6×5＝30，A: 4×3＝12，B: 2×1＝2 具体步骤（略）

§ 1.4 等可能概型（古典概型）



- 例3，**生日悖论**
  - 将n只球随机放入$N(N\geq n)$个盒子中去.
  - 求每个盒子至多有一只球的概率(设盒子容量不限)
- 解：分析：n只球放入N个盒子中的每一种方法为一个基本事件
  - 由对称性易知：古典概型
  - S：共有N^n种不同的放法
  - A：至多放一只，共有N×(N－1)×(N－2)×…×(N－n＋1)
  - 所以$P(\text{A})= N\times(N-1)\times(N-2)\times\ldots\times(N-n+1)/N^n=\dfrac{A_N^n}{N^n}$
- 生日问题

  - 设每人的生日在一年365天中任一天是等可能的
  - 任选n个人(n≤365)，生日各不相同的概率：
  - 由公式，概率＝$\dfrac{A_{365}^n}{365^n}$
  - 则n个人中至少有两人生日相同的概率$p=1-\dfrac{A_{365}^n}{365^n}$
  - 当n＝38时，p＝0.864
  - 当n＝64时，p＝0.997，几乎等于1，60个人的班级以近乎于1的概率有两个人生日相同

§ 1.4 等可能概型（古典概型）

- 例4 **超几何分布的概率公式**
  - 设有N件产品，其中D件次品，今从中任取n件
  - 问其中恰有$k(k\leq D)$件次品的概率是多少?
- 解：S：N件中任取n件（不放回抽样，也不计次序）
  - 共有C_N^n种取法，每一取法为一基本事件
  - 注意：符号C_N^n为组合数，N，n均为整数，
  - 当N为实数时记做 $\binom{N}{n}$
  - A：恰有k件次品：相当于在D件次品中任选k件，并在$N-D$件正品中任选$n-k$件
  - 共有 $C_D^k \times C_{N-D}^{n-k}$ 件
  - $$\therefore P(A)=\frac{C_D^k \times C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$

§ 1.4 等可能概型（古典概型）

- 例5 **抽签问题**
  - 袋中有a只白球，b只红球，k个人依次在袋中取一只球，分别采用放回抽样和不放回抽样的方式，求第i个人取到白球的概率($k<a+b, i\le k$),记为$P(B)$
- 解：(1)放回抽样时
  - 第i个人取球不受前$i-1$个人的影响，因此概率等于白球的个数比上球总数
  - 即$P(\mathrm{B})=\dfrac{a}{a+b}$
  - (2)不放回抽样的情况
  - 第i个人取到白球的取法总数比上总取法数，其中总取法数如下：
  - S：总的取法，k个人各取一只球，每种取法为一个基本事件
  - 共有$(a+b)(a+b-1)\ldots(a+b-k+1)=A_{a+b}^{k}$种取法
  - 事件B发生时，第i个人应取到白球，可以是a只中的任意一只，共有a种情况，对于每一种情况来说，其余$k-1$个人是从其余$a+b-1$个球中任取$k-1$只，由于是不放回抽样，共有A_{a+b-1}^{k-1}种，
  - 所以事件B发生时可能的取法总数为$a\times A_{a+b-1}^{k-1}$
  - $P(\mathrm{B})=a\times\dfrac{A_{a+b-1}^{k-1}}{A_{a+b}^{k}}=\dfrac{a}{a+b}$
  - 可见概率与i无关，即k个人每人取到白球的概率与取球的先后次序，取球的方式(是否放回抽样)无关，它们机会均等

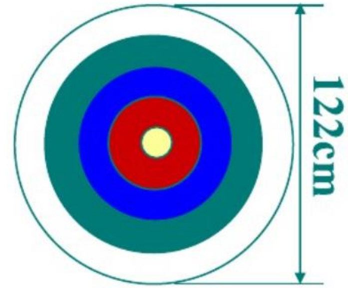
§ 1.4 等可能概型（古典概型）

- **例 6 一道课后习题**
  - **从5双不同的鞋子中，任取4只，这4只鞋子中至少有两只鞋子配成一双的概率是多少?**
- **解：古典概型**
  - **为方便分析，先求4只都不配成双的概率*p***
  - **S：共有** C_{10}^{4} **种不同的取法**
  - **4只都不配成双的概率:**
  - **5双鞋中先任选4双，然后每双鞋中任选一只**
  - $C_5^4 \times C_2^1 \times C_2^1 \times C_2^1 \times C_2^1$
  - **所以*p*＝** $\dfrac{2^4 C_5^4}{C_{10}^4}$
  - **所以至少两只配成双的概率为1－*p*＝1－** $\dfrac{2^4 C_5^4}{C_{10}^4}$
  - **或直接求:**
  - **有1双配成双：** $C_5^1 \times (C_4^2 \times C_2^1 \times C_2^1)$ **有两双配成双** C_5^2
  - **所以*P*(B)=** $(C_5^1 \times (C_4^2 \times C_2^1 \times C_2^1) + C_5^2) / C_{10}^4$

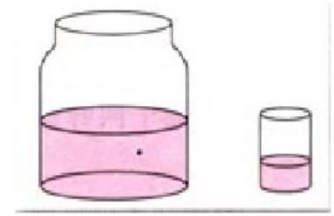
§ 1.4 等可能概型（古典概型）

- 例7 **小概率事件与实际推断原理**
  - 某接待站在某一周曾接待过12次来访，均是在周二和周四进行
  - 问：是否可以推断接待时间是有规定的?
- 解：假设接待事件没有规定，而来访者在一周内任一天去接待站是等可能的
  - 那么12个来访者分布于一周7天共有7 种可能分布
  - 现在12个人均集中在周二和周四两天，共有2 种可能情况
  - 因此在没有规定的情况下，12个来访者均集中在周二和周四两天的概率为
  - $2^{12}/7^{12}=0.0000003$,千万分之三，近乎于不可能事件
- **实际推断原理：根据实践经验，概率很小的事件在一次试验中实际上几乎是不发生的**
  - 现在这种小概率事件竟然发生了，所以假设可能不正确，可以推断接待时间是有规定的
  - （如果2天改为4天，$4^{12}/7^{12}=0.0012$,则很难说是小概率事件）

§ 1.4 等可能概型（古典概型）



➲ 几何概型（概率的几何定义）



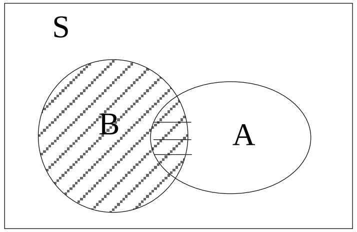
- 对于一个随机试验，将每个基本事件理解为从某个特定的集合区域内随机地取一点，该区域中的每一个点被取到的机会都一样。一个随机事件的发生则理解为恰好取到所描述区域内某个指定区域中的点。这种方法处理随机试验，称为几何概型。

➲ 几何概型的计算

- **设试验的每个样本点是等可能落入区域Ω上的随机点M，且$D \subseteq \Omega$，则M点落入子区域D(事件A)上的概率为:**
- $$P(A)=m(D)/m(\Omega).$$
- **其中$m(\cdot)$为自然测度**
- **测度可能是长度、面积、体积，甚至是质量，比如均匀分布**

§ 1.5 条件概率

- 条件概率问题是概率论中，内容最为丰富的一个问题，主要考虑：
  - 在事件A发生的条件下事件B发生的概率。
  - 如：通信系统中，出现接收信号错误，在接收系统正常条件下，由信道产生错误的概率?
- (一) 条件概率的定义
- 例1：一枚硬币抛两次，观察其出现H和T的情况
  - 设事件A：“至少有一次为H”
  - 事件B：“两次抛出同一面”
  - 求已知事件A发生的条件下，事件B发生的概率



- 解：试验本身是古典概型
  - S={HH，HT，TH，TT}
  - A={HH，HT，TH }
  - B={HH，TT }
  - AB={HH}

- 在条件概率下，相当于重新确定了样本空间
- $S'=S\cap A=A$ ； $B'=B\cap A=AB$
- 我们记已知事件A发生的条件下事件B发生的概率为$P(B|A)$，则由古典概型的计算方法
- $P(B|A)=\dfrac{AB\text{中的基本事件数}}{A\text{中的基本事件数}}=1/3$
- 而在无条件时$P(B)=2/4=1/2$，可见二者的不同

§ 1.5 条件概率

- 在 $P(B|A)=\dfrac{AB\text{中的基本事件数}}{A\text{中的基本事件数}}$中，
- 令分子分母同时除以样本空间中的基本事件数n，则有一般的
  - $P(B|A)=\dfrac{AB\text{中的基本事件数}/S\text{中的基本事件数}}{A\text{中的基本事件数}/S\text{中的基本事件数}}=P(BA)/P(A)$
  - 其中$P(A)>0$，显然对于古典概型上式都成立
- 于是有如下定义：
- **定义：设A，B是两事件，<u>且$P(A)>0$</u>，则称**

  $$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

  为在事件A发生的条件下，事件B发生的条件概率。

条件概率也可称为后验概率，普通的概率称为先验概率，是根据以往实验得到的

- 它也符合概率定义的三个条件：
  - 1）非负性：事件B，有$P(B|A)\geq 0$
  - 2）规范性：对于必然事件S，有$P(S|A)=1$;
  - 3）可列可加性：设$B_1, B_2, \dots, B_k$是两两互不相容的事件，即对于$i\neq j$，$B_iB_j=\Phi$，i，$j=1$，2，…，则有

    $$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i|A\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i\mid A)$$

一般的概率的性质都适合于条件概率，区别是必须加上条件，例如：

设A，B，C是三事件，

若$B\subset C$，则有$P(C-B)=P(C)-P(B)$

同样的有$P((C-B)|A)=P(C|A)-P(B|A)$

又$P(C\cup B)=P(C)+P(B)-P(CB)$

则$P(C\cup B|A)=P(C|A)+P(B|A)-P(CB|A)$

§ 1.5 条件概率

- 一般的，求条件概率有两种思路

  《一》用概率的含义，依据条件重新写出样本空间和事件子集

  《二》用条件概率的定义，若$P(A)>0$，则

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

- 例2：掷两颗骰子，已知点数之和为7，求有一颗为1点的概率
  - A:两颗骰子点数之和为7（为条件）
  - B: 有一颗为1点。 求解$P(B|A)$
  - 解: S:36 A：6 B：11 AB：2
  - 所以所求的条件概率$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{2/36}{6/36}=1/3$
  - 或由条件概率的含义直接有2/6=1/3

第1颗 \ 第2颗	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

小结

- **知识点：**
  - **古典概型，7个列子(超几何分布、生日悖论、分组问题)**
  - **几何概型**
  - **条件概率的基本定义、性质和运算**

- **作业：** P_{25} **5, 7, 8, 12, 14, 19, 24**