第二章 随机过程基本知识（3）

主讲人：李伟

西安电子科技大学数学与统计学院

2014年秋季

§3 随机过程的分类

◆一.按参数集与状态连续还是离散分类

（1）离散时间离散状态（2）离散时间连续状态

（3）连续时间离散状态（4）连续时间连续状态

二.按样本轨道连续与否来分

◆三.按是否具有二阶矩来分

◆四.按增量的性质来分

五.按是否具有马氏性来分

一.按参数集与状态连续还是离散分类

（1）离散时间离散状态

伯努利过程：***T*=*N*, *S*={0,1},**设X_1，X_2，……，X_n，……

独立同分布于**0-1**分布，则称$\{X_n, n \in N\}$为伯努利过程.

伯努利过程描述了一系列独立同分布的随机试验.

如果令 $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $S_0 = 0$

则称S={S_n, n=0,1,2, … ，}为二项过程.

（2）离散时间连续状态

严高斯白噪声：$T=N$, $S=R$,设X_1，X_2，……，X_n，……

独立同分布于$N(0,1)$分布，则称$\{X_n, n\in N\}$为严高斯白噪声.

高斯白噪声

- 具有高斯（正态）分布
- 均值函数为0
- 功率谱密度为常数

（3）连续时间离散状态

Poisson过程　$T=R_+$，　$S=N$

计数过程　称实随机过程{N(t), t≥0}是计数过程，如果N(t)表示直到t时刻为止发生的某随机事件数.

性质 ①　$\forall t, N(t) \geq 0$

② $N(t)$是非负整数

③ $\forall 0 \leq s < t, N(t) \geq N(s)$

④ $\forall 0 \leq s < t, N(t) - N(s)$　表示时间间隔 $t-s$ 内发生的随机事件数.

实例

1.电话交换台的呼叫次数
2.放射性裂变的质点数
3.发生故障而不能工作的机器数
4.通过交通路口的车辆数
5.来到某服务窗口的顾客数
…………

以上实例中的呼叫,质点,机器,车辆,顾客等也统一叫做**随机点**

若计数过程 **{*N*(*t*),*t*≥0}** 满足

$$(a).N(0)=0$$

$$(b).\forall 0\le s<t, N(t)-N(s)\sim P(\lambda(t-s))$$

$$(c)\forall n\ge 2, 0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n<\cdots, r.v.s.$$

$$N(t_n)-N(t_{n-1}), N(t_{n-1})-N(t_{n-2})\cdots, N(t_1)-N(t_0)$$

相互独立的随机变量序列

称***N*(*t*)** 是参数为 $\lambda>0$ 的**Poisson过程.**

复合poisson过程

定义　设 $\{N(t),t\geq 0\}$ 是参数为λ 的Poisson过程, $\{Y_k,k=1,2,\ldots\}$是一列独立同分布的随机变量序列, 且与 $\{N(t),t\geq 0\}$独立

$$令X(t)=\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, t\geq 0$$

称 $\{X(t),t\geq 0\}$为复合Poisson过程.

（4）连续时间连续状态

高斯过程(正态过程） $T=R,\ S=R$

设$\{X(t),\ t\in T\}$是取实值的S.P. ,若对任意的$n\geq 1$及$t_1,t_2,\ldots,t_n\in T$, $\{X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n)\}$是$n$维正态 随机变量,

则称S.P. $\{X(t),\ t\in T\}$为正态过程或高斯过程

注意

(1) 若$\{X(t), t \in T\}$是一族正态随机变量, 但$\{X(t), t \in T\}$不一定是正态过程.

(2) 正态过程的有限维分布由其均值函数与相关函数完全确定.

(3) 正态过程是二阶矩过程.

正态随机变量补充

补充:n维正态随机变量分布及性质

定义　设$X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$是n维随机变量，如果其联合概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|B|^{1/2}}e^{-\frac{1}{2}(x-a)B^{-1}(x-a)^T}$$

则称$X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$服从均值向量为a，协方差矩阵为B的n维正态分布. 记$X\sim N(a,B)$

设$\{X(t),\ t\in T\}$是正态过程，则n维特征函数为：

$$\varphi(t_1,\cdots,t_n;u_1,\cdots,u_n)$$

$$=\exp(\mathrm{j}\sum_{k=1}^{n}u_k m_X(t_k)-\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n}u_k u_l C_X(t_k,t_l))$$

定理　设X=$(X_1, X_2, \ldots, X_n) \sim N(a, B)$则

（1）$Y = \sum_{k=1}^{n} l_k X_k$服从一维正态分布．$l_k$是常数.

（2）X的$m(m < n)$个分量服从m维正态分布.

（3）Y=XC（$C_{n\times m}$）, 服从m维正态分布$N(aC, C^T BC)$

Wiener过程（Brown motion） B M

称实S.P.$\{W(t), t \geq 0\}$是参数为σ^2的Wiener过程，如果

(1) $W(0) = 0$

(2) $\forall 0 \leq s < t, W(t) - W(s) \sim N(0, \sigma^2(t-s))$

(3) $\forall n \geq 2, \forall 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \cdots, W(t_n) - W(t_{n-1}), \cdots$
$W(t_2) - W(t_1), W(t_1) - W(t_0)$ 相互独立

（4）随机过程W具有连续的样本轨道

$\sigma^2 = 1$ 的B M也称为标准B r o w n运动

二　根据轨道连续与否来分

样本轨道连续的随机过程

样本轨道非连续的随机过程

基本定义

设$\mathbf{X}=\{\mathbf{X_t}(\boldsymbol{\omega}):\mathbf{t}\in\mathbf{T}\}$ 定义在概率空间(Ω，F，P)上取实值的随机过程，若对任意的$\mathbf{t}\in\mathbf{T}$，

1）： $\mathbf{p}(\mathbf{lim}_{\mathbf{s}\to\mathbf{t}}|\mathbf{X_s}-\mathbf{X_t}|=\mathbf{0})=\mathbf{1}$成立，称$\mathbf{X_t}(\boldsymbol{\omega})$样本轨道连续；

2） 若对任意的$\boldsymbol{\varepsilon}>0$，$\mathbf{lim}_{\mathbf{s}\to\mathbf{t}}\,\mathbf{p}(|\mathbf{X_s}-\mathbf{X_t}|\geq\boldsymbol{\varepsilon})=\mathbf{0}$，称$\mathbf{X_t}(\boldsymbol{\omega})$依概率连续；

3）若$\mathbf{lim}_{\mathbf{s}\to\mathbf{t}}\,\mathbf{E}\left(|\mathbf{X_s}-\mathbf{X_t}|^2\right)=\mathbf{0}$，称$\mathbf{X_t}(\boldsymbol{\omega})$均方连续，记为$\mathbf{L}^2$-连续；

4）若$\mathbf{t}\in\mathbf{N}$，$\mathbf{lim}_{\mathbf{n}\to\infty}\,\mathbf{E}\left(|\mathbf{X_n}-\boldsymbol{\xi}|^2\right)=\mathbf{0}$，则称$\{\mathbf{X_n},\mathbf{n}=\mathbf{1},\mathbf{2},\cdots\}$均方收敛到$\boldsymbol{\xi}$；

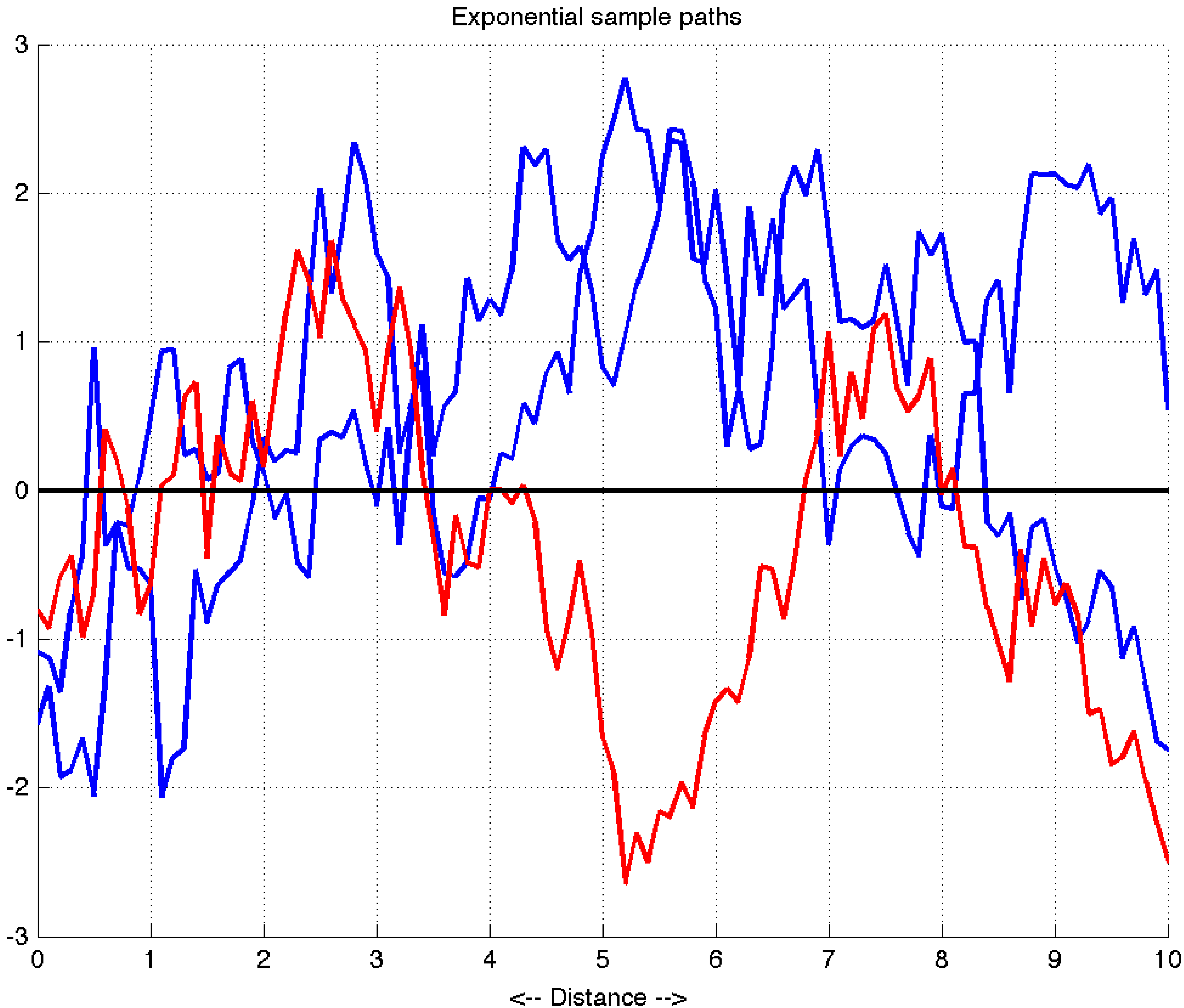
例 1： 设$\zeta(\omega)$和$\eta(\omega)$是定义在同一概率空间上的两个随机变量，定义随机过程$X = \{X_t(\omega): t \geq 0\}$为：

$$X_t(\omega) = \zeta(\omega) + t\,\eta(\omega)$$

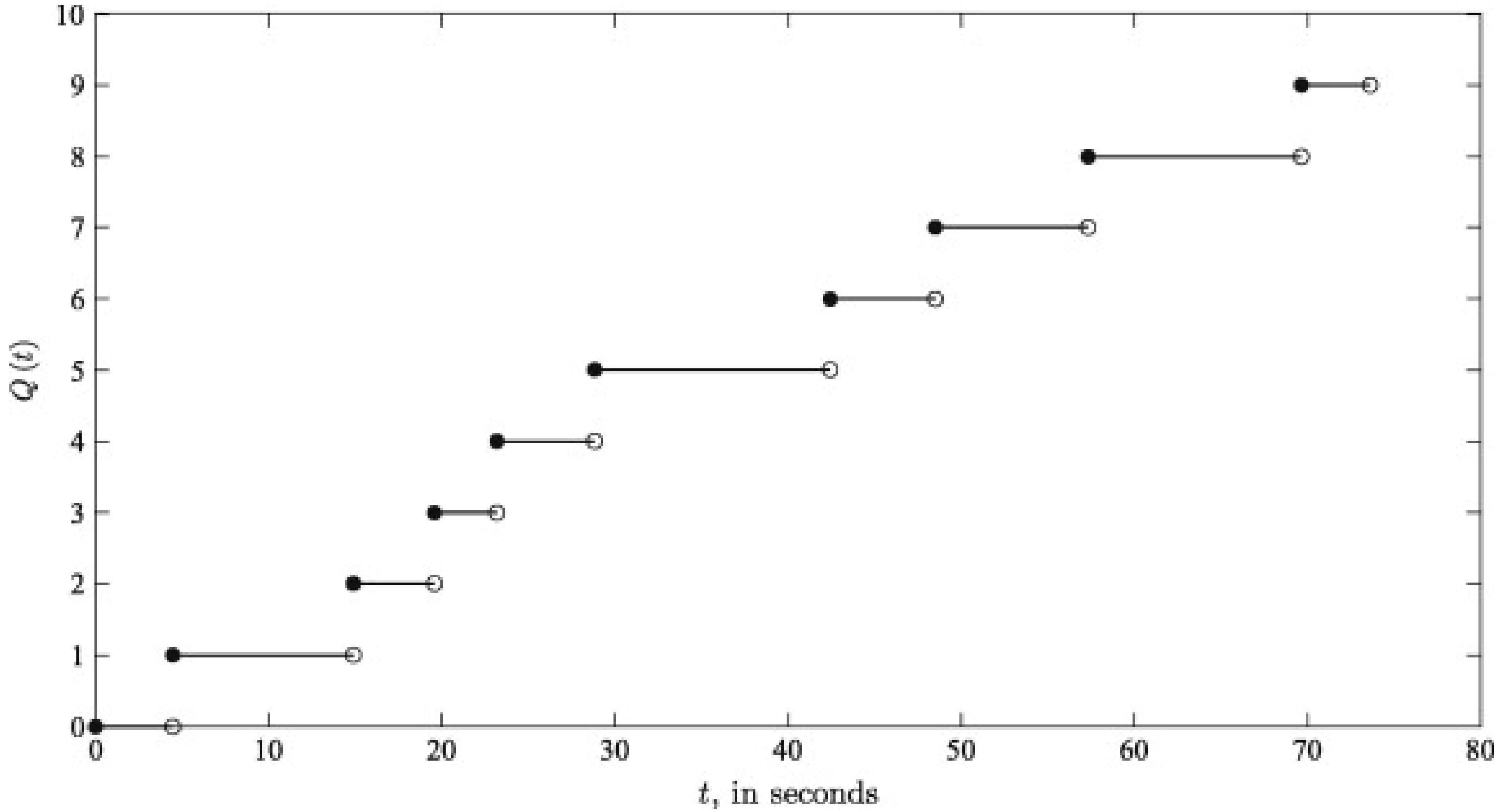
则可以验证

$$\lim_{s \to t} |X_s(\omega) - X_t(\omega)| = \lim_{s \to t} |(s - t)\eta(\omega)| = 0$$

故随机过程$X_t(\omega)$样本轨道连续



Exponential sample paths
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
<-- Distance -->



10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
$Q(t)$
0
10
20
30
40
50
60
70
80
t, in seconds

三．按二阶矩存在与否非分

二阶矩过程

定义 若S. P. $\{X(t), t\in T\}$是一个复或实值随机过程，若对任意的$t\in T$，满足 $E|X(t)|^2<+\infty$
则称S . P . $\{X(t), t\in T\}$是**二阶矩过程.**

注 二阶矩过程的均值函数与相关函数一定存在

可利用均值函数和相关函数讨论二阶矩阵过程的性质.

与二阶矩过程有关的不等式

詹森(Jensen's)不等式

X是随机变量，如果对任意凸函数 $\varphi(x)$ 满足$E[|\varphi(X)|]<+\infty$, 则

$$\varphi(E(X)) \le E(\varphi(X))$$

柯西—施瓦兹(Cauchy-Schwartz)不等式

$$|E(XY)|^2 \le E|X|^2 E|Y|^2$$

X,**Y**是具有二阶矩的随机变量.

定理(二阶矩过程相关函数性质)

设$\{X(t), t\in T\}$是二阶矩过程, 则相关函数$R_X(s, t)$有

(1)**共轭对称性** $R_X(s, t)=\overline{R_X(t, s)}$

(2)**非负定性** 对任意 $t_1,t_2,\ldots,t_n\in T$, 任意复数 $\lambda_1 ,\lambda_2,\ldots, \lambda_n$ 有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} R_X(t_k, t_l)\overline{\lambda_k}\lambda_l \geq 0$$

(2) $$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} R_X(t_k,t_l)\overline{\lambda_k}\lambda_l = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \mathrm{E}[\overline{\mathrm{X}(t_k)}\mathrm{X}(t_l)]\overline{\lambda_k}\lambda_l$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \mathrm{E}[\overline{\mathrm{X}(t_k)\lambda_k}\ \mathrm{X}(t_l)\lambda_l]$$

$$= \mathrm{E}[\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(\overline{\mathrm{X}(t_k)\lambda_k})(\mathrm{X}(t_l)\lambda_l)]$$

$$= \mathrm{E}[(\sum_{k=1}^{n}\overline{\lambda_k \mathrm{X}(t_k)})(\sum_{l=1}^{n}\lambda_l \mathrm{X}(t_l))]$$

$$= \mathrm{E}[\overline{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k \mathrm{X}(t_k)}\ \sum_{l=1}^{n}\lambda_l \mathrm{X}(t_l)]$$

$$= \mathrm{E}\left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k \mathrm{X}(t_k)\right|^2 \geq 0$$

四.根据增量的性质来分

1.正交增量过程

2.独立增量过程

3.平稳增量过程

1.正交增量过程

定义 设{$X(t)$, $t\in T$}是二阶矩过程，若对任意的

$$t_1<t_2\le t_3<t_4\in T$$

都有

$$E[(\overline{X(t_2)-X(t_1)})(X(t_4)-X(t_3))]=0$$

则称S.P. {$X(t)$,$t\in T$}是一正交增量过程.

注：这里 $<X,Y>=E[XY]$可视为内积

2 独立增量过程

设$\{X(t),t\in T\}$是一是S.P. 如果对 $\forall n\geq 3$ 以及

$\forall t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T$，有

$$X(t_2)-X(t_1), X(t_3)-X(t_2), \cdots X(t_n)-X(t_{n-1})$$

是相互独立的随机变量，则称$\{X(t),t\in T\}$是独立增量过程.

定理

独立增量过程的有限维分布函数由其一维分布函数和增量分布函数确定.

证明思路

由于随机变量的分布函数与特征函数一一对应.

只需证

独立增量过程的有限维特征函数由其一维特征函数和增量特征函数确定.

证明 对$\forall n \geq 1$及$t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T$, **n维随机变量的**

$(X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n))$ **的特征函数为**

$$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n; u_1, u_2, \ldots, u_n) = \mathrm{E}[e^{j(u_1 X(t_1) + \cdots + u_n X(t_n))}] \quad ①$$

令 $Y_1 = X(t_1), Y_2 = X(t_2) - X(t_1), \cdots, Y_n = X(t_n) - X(t_{n-1})$

由题意知 $\mathbf{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n}$独立

则 $X(t_1) = Y_1,$

$X(t_2) = Y_1 + Y_2,$

$\cdots,$

$X(t_n) = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ 代入①式

$$\varphi(t_1,t_2,\ldots,t_n;u_1,u_2,\ldots,u_n)=\mathrm{E}[e^{j(u_1X(t_1)+\cdots+u_nX(t_n))}]$$

$$=\mathrm{E}[e^{j(u_1Y_1+u_2(Y_1+Y_2)+\cdots+u_n(Y_1+Y_2+\cdots+Y_n))}]$$

$$=\mathrm{E}[e^{j((u_1+u_2+\cdots+u_n)Y_1+(u_2+u_3+\cdots+u_n)Y_2+\cdots+u_nY_n)}]$$

$$=\mathrm{E}[e^{j(u_1+u_2+\cdots+u_n)Y_1}e^{j(u_2+u_3+\cdots+u_n)Y_2}\cdots\cdots e^{ju_nY_n}]$$

由$Y_1Y_2,\ldots,Y_n$的独立性

$$=\mathrm{E}[e^{j(u_1+u_2+\cdots+u_n)Y_1}]\mathrm{E}[e^{j(u_2+u_3+\cdots+u_n)Y_2}]\cdots\cdots\mathrm{E}[e^{ju_nY_n}]$$

$$=\varphi_{Y_1}(u_1+u_2+\cdots+u_n)\varphi_{Y_2}(u_2+u_3+\cdots+u_n)\cdots\cdots\varphi_{Y_n}(u_n)$$

证毕

3.平稳增量过程

如果对于任意 $s<t\in T$,

$X(t)-X(s)$的分布仅依赖于$t-s$，而与s, t本身取值无关，则称$\{X(t),t\in T\}$为平稳增量过程.

如果S.P.$\{X(t),t\in T\}$既是平稳增量过程，又是独立增量过程，则称$\{X(t),t\in T\}$为平稳独立增量过程.

若计数过程 **{*N*(*t*),*t*≥0}** 满足

$$(a).N(0)=0$$

$$(b).\forall 0\le s<t, N(t)-N(s)\sim P(\lambda(t-s))$$

$$(c)\forall n\ge 2, 0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n<\cdots, r.v.s.$$

$$N(t_n)-N(t_{n-1}), N(t_{n-1})-N(t_{n-2})\cdots, N(t_1)-N(t_0)$$

相互独立的随机变量序列

称***N*(*t*)** 是参数为 $\lambda>0$ 的**Poisson过程.**

Wiener过程（Brown motion） B M

称实S.P.$\{W(t),t\geq 0\}$是参数为σ^2的Wiener过程，如果

(1) $W(0)=0$

(2) $\forall 0\leq s<t, W(t)-W(s)\sim N(0,\sigma^2(t-s))$

(3) $\forall n\geq 2, \forall 0=t_0<t_1<\cdots<t_n<\cdots, W(t_n)-W(t_{n-1}),\cdots W(t_2)-W(t_1), W(t_1)-W(t_0)$ 相互独立

（4）随机过程W具有连续的样本轨道

$\sigma^2=1$ 的ＢＭ也称为标准Ｂｒｏｗｎ运动

四.根据过程的马尔科夫性来分

1.马尔科夫过程

2.非马尔科夫过程

马尔科夫性：在已知过去和现在的条件下，过程在将来时刻所处的统计特性仅依赖于现在的状态，而与过去时刻无关。即将来与过去是独立的。

例1：

设**S.P.** $\{X(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t, t\in R\}$,其中**A,B**为相互独立的**r.v.**，且都服从正态分布**N(0,σ** ^{2}), **ω**是常数.

试证明 该过程是正态过程，并求它的有限维分布.

例2. 设随机变量R和Θ相互独立，其中R服从瑞利分布，

密度函数为$f(r)=\begin{cases}\dfrac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, & r\geq 0\\ 0, & r<0\end{cases}$

Θ服从$[0,2\pi]$上均匀分布，定义：

$X_t=R\cos(\Theta+at), \qquad t\in R, a$为常数

验证随机过程$X=\{X_t, t\in R\}$为正态过程

设随机变量 $\xi = R\cos\Theta,\ \eta = R\sin\Theta$

下面证明二维随机变量（ξ,η） 服从正态分布

事实上 $R=\sqrt{\xi^2+\eta^2},\ \Theta=\arctan(\frac{\eta}{\xi})$

则他们相应的雅克比行列式为

$$\frac{\partial(R,\Theta)}{\partial(\xi,\eta)}=\begin{vmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

因此 (ξ,η) 联合概率密度函数为

$$f_{(\xi,\eta)}(x,y)=f_{(R,\Theta)}(\sqrt{x^2+y^2},\arctan\frac{y}{x})\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=f_R(\sqrt{x^2+y^2})f_\Theta(\arctan\frac{y}{x})\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2})$$

例 3：

设 {W(t),t≥0}是参数为σ²的Wiener过程. 则

(1) $\forall t>0, W(t)\sim N(0,\sigma^2 t)$

(2) $m_W(t)=0,\quad D_W(t)=\sigma^2 t,\quad t\geq 0,$

$$R_W(s,t)=C_W(s,t)=\sigma^2\min(s,t), s,t,\geq 0$$

证明 **(1) 由定义,显然成立.**

(2) 由(1)易知有

$$m_W(t)=0, D_W(t)=\sigma^2 t, t\geq 0$$

对s≥0, t ≥0, 不妨设 s≤t, 则

$$R_W(s,t) = \mathrm{E}[W(s)W(t)]$$

$$= \mathrm{E}[(W(s)-W(0))(W(t)-W(s)+W(s))]$$

独立性

$$= \mathrm{E}[(W(s)-W(0))(W(t)-W(s))] + \mathrm{E}[W(s)]^2$$

$$= 0 + \mathrm{E}[W(s)]^2$$

$$= D[W(s)] + (\mathrm{E}[W(s)])^2$$

$$= \sigma^2 s$$

$$= \sigma^2 \min(s,t)$$

$$C_W(s,t) = R_W(s,t) - m_W(s)m_W(\mathrm{t}) = \sigma^2 \min(s,t)$$

例 4． **Wiener过程是正态过程.**

证明 设 **{W(t),t≥0}是参数为σ²的Wiener过程.**
则对任意的**n**≥1, 以及任意的

$$0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n$$

$\{W(t_1), W(t_2), \ldots, W(t_n)\}$是n维随机变量

由**Wiener**过程的定义知

$W(t_1), W(t_2)-W(t_1), \cdots, W(t_n)-W(t_{n-1})$ 相互独立

$W(t_k)-W(t_{k-1})$服从$N(0,\ \sigma^2(t_k-t_{k-1}))$分布

所以（$W(t_1), W(t_2)-W(t_1), \cdots, W(t_n)-W(t_{n-1})$）

是**n**维正态随机变量.

又由于

$$(W(t_1),W(t_2),\cdots,W(t_n))=$$

$$(W(t_1),W(t_2)-W(t_1),\cdots,W(t_n)-W(t_{n-1}))\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

所以$(W(t_1),W(t_2),\cdots,W(t_n))$是**n维正态变量.**

所以**{W(t),t≥0}**是正态过程.

例5: 写出SBM的*n*维特征函数

不是一般性，假设 $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n$ 定义增量

$\xi_k=W(t_k)-W(t_{k-1}),\ k=1,2,\cdots,n.$ 因此 $\xi_1,\xi_2\cdots\xi_n$

是相互独立且 $\xi_k\sim N(0,t_k-t_{k-1}).$ 由于 $W(t_k)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i,k=1,\cdots,n$

故

$$\varphi(t_1,t_2\cdots,t_n;u_1,\cdots,u_n)=E[\exp(j\sum_{k=1}^{n}u_kW(t_k))]$$

$$=E[\exp(j(u_1+\cdots u_n)\xi_1]\times\cdots\times E[\exp(ju_n\xi_n)]$$

$$=\exp(-\tfrac{1}{2}(u_1+\cdots u_n)^2t_1)\times\cdots\times\exp(-\tfrac{1}{2}u_n{}^2(t_n-t_{n-1}))$$

本章作业

1，2，5，6，7，9