第二章 随机过程基本知识(2)

主讲人：李伟
西安电子科技大数学与统计学院
2014年秋季

第二节：1）有限维特征函数族

2）随机过程的数字特征

三 随机过程的有限维特征函数族

1.Stieltjes积分

定义 设$f(x)$, $g(x)$是定义在[a,b]上的两个有界函数，对[a,b] 的任一划分 $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, 记 $\triangle=\max\{\triangle x_k\}$

任取$\xi_k\in[x_{k-1}, x_k]$, k=1, ···, n. 作和

$$S=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]$$

若极限 $\lim\limits_{\Delta\to 0} S$ 存在,且与[a,b]的分法及ξ_k的取法无关.

则称此极限为$f(x)$对函数$g(x)$在[a,b]上的Stieltjes积分.

简称S积分. 也称$f(x)$对$g(x)$在[a,b]上S可积.

记 $\int_a^b f(x)dg(x)$

设$f(x)$, $g(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的两个函数，若在任意有限区间[a,b] $f(x)$对 $g(x)$在[a,b] S可积，且

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)g(x)\text{ 存在}$$

则称此极限为$f(x)$对$g(x)$在无穷区间$(-\infty,+\infty)$上的**Stieltjes积分.** 记

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dg(x)$$

关于Stieltjes积分有如下性质

(1)当$g(x)$为跳跃函数,且在x_i (i=1,2,…)具有跃度p_i时有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dg(x)=\sum_i f(x_i)p_i$$

(2)当$g(x)$存在导数$g'(x)$时,有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dg(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g'(x)dx$$

(3) 设函数g(x)定义在(-∞,+ ∞)，若积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jtx}dg(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos txdg(x)+j\int_{-\infty}^{+\infty}\sin txdg(x)$$

存在，则称此积分为$g(x)$的Fourier-stieltjes积分，记F-S积分

定义 **设随机变量X的分布函数为F(x)，若**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| dF(x) < +\infty$$

则X的期望为

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x)$$

并有以下结论

(1)设 随机变量X的分布函数为F(x)，y=g(x)是连续函数, 若

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| g(x) \right| dF(x) < +\infty$$

则随机变量 Y=g(X)的期望为

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF(x)$$

(2)一般设r.v.$(X_1,\ldots,X_n)$的联合分布函数为$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$为连续函数. 若

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\left|g(x_1,x_2,\ldots,x_n)\right|dF(x_1,x_2,\ldots,x_n)<+\infty$$

则随机变量$Y=g(X_1,X_2,\ldots,X_n)$的数学期望存在. 且

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}g(x_1,x_2,\ldots,x_n)dF(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

2.随机变量的特征函数

定义 设随机变量X的分布函数F(x),则称

$$\varphi(u)=\mathrm{E}[e^{juX}]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jux}dF(x) \qquad -\infty<u<+\infty$$

为随机变量X的特征函数.

其中u为实参变量, e^{juX} 为复随机变量

关于特征函数的几点说明

(1) 特征函数总是存在的.

对任意实数**u**, 有$|e^{jux}|=1$. 故$E[e^{jux}]$总存在.

(2)特征函数的性质

i $\left|\varphi(u)\right| \le \varphi(0) = 1$

ii $\overline{\varphi(u)} = \varphi(-u)$

iii 若Y=aX+b ，a, b为常数, 则

$$\varphi_Y(u) = e^{jbu}\varphi_X(au)$$

iv $\varphi(u)$在（$-\infty, +\infty$）上一致连续.

- 若X与Y相互独立,Z=X+Y,则

$$\varphi_Z(u) = \varphi_X(u)\varphi_Y(u)$$

(可推广到n个相互独立随机变量)

vi $\varphi(u)$ 是非负定的.

即对任意的n, 任意复数Z_k, 任意实数u_k (k=1,2,...,n), 有

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(u_l - u_k) z_l \bar{z}_k \geq 0$$

vii 设随机变量X的n阶原点矩(即$E[X^k]$)存在,

则 $\varphi(u)$存在k(k≤n)阶导数,且有

$$\varphi^{(k)}(0)=j^k\mathrm{EX}^k,\quad k\le n$$

$$\Rightarrow\quad \mathrm{EX}^k=\frac{\varphi^{(k)}(0)}{j^k},\quad k\le n$$

(3)一些重要分布的特征函数

单点分布　　**P(X=c)=1, c常数. 则**

$$\varphi(u)=E[e^{juX}]=e^{juc}$$

二项分布 $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$,

$k=0,1,\ldots,n.\ 0<p<1,\ q=1-p.$

则特征函数

$(e^{ju}p)^k$

$$\varphi(u)=E[e^{juX}]=\sum_{k=0}^{n}e^{juk}C_n^k p^k q^{n-k}=(pe^{ju}+q)^n$$

Poisson分布 $$\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

k=0,1,2,…, λ >0

则特征函数

$$\varphi(u)=E[e^{juX}]=\sum_{k=0}^{\infty}e^{juk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{ju})^k}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda e^{ju}}=e^{\lambda(e^{ju}-1)}$$

均匀分布 r.v.X～U(a,b],密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

则特征函数

$$\varphi(u)=\mathrm{E}[e^{ju\mathrm{X}}]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jux}f(x)dx$$

$$=\int_a^b e^{jux}\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{ju(b-a)}(e^{jbu}-e^{jua})$$

正态分布 **r.v.X～N(μ, σ²),密度函数为**

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty < x + \infty,\mu,\sigma(>0)\text{常数}$$

则特征函数

$$\varphi(u)=\mathrm{E}[e^{juX}]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jux}f(x)dx$$

令$v=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jux}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ju(\sigma v+\mu)}e^{-\frac{v^2}{2}}dv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{j\mu u-\frac{1}{2}\sigma^2u^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(v-ju)^2}{2}}dv=e^{j\mu u-\frac{1}{2}\sigma^2u^2}$$

记住！

特别X～N(0,1)时

$$\varphi(u)=e^{-\frac{u^2}{2}}$$

指数分布

r.v.X服从参数为λ（>0）的指数分布， 概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x\geq 0\\ 0, \quad x<0\end{cases}$$

则特征函数

$$\varphi(u)=\mathrm{E}[e^{juX}]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jux}f(x)dx$$

$$=\int_{0}^{+\infty}e^{jux}\lambda e^{-\lambda x}dx=\int_{0}^{+\infty}\lambda e^{(ju-\lambda)x}dx$$

$$=\frac{\lambda}{\lambda-ju}$$

(4)随机变量的分布函数与其特征函数相互唯一确定.

定义(多元特征函数)

设n维随机变量$X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$的联合分布函数为$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$,则称

$$\varphi(u_1,u_2,\cdots u_n)=\mathrm{E}[e^{j(u_1X_1+u_2X_2+\cdots+u_nX_n)}]$$

$$=\mathrm{E}[e^{juX^T}]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j(u_1x_1+u_2x_2+\cdots+u_nx_n)}dF(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

为n维随机变量X的特征函数.

也称多元特征函数

多元特征函数具有与一元特征函数类似的性质

n维随机变量的特征函数与其联合分布函数是一一对应的

特征函数应用举例:

1.设X服从参数为λ的Poisson分布，求$\mathrm{EX},\mathrm{EX}^2,\mathrm{DX}$

解：　由题意$\varphi(u)=e^{\lambda(e^{ju}-1)}$

则　$\varphi'(u)=j\lambda e^{ju}e^{\lambda(e^{ju}-1)},\varphi''(u)=-(\lambda e^{ju}+\lambda^2e^{2ju})e^{\lambda(e^{ju}-1)}$

则利用特征函数性质：$\varphi^{(k)}(0)=j^k\mathrm{EX}^k$

得　$EX=\dfrac{\varphi'(0)}{j}=\lambda$　　$EX^2=\dfrac{\varphi''(0)}{j^2}=\lambda+\lambda^2$

$\therefore DX=EX^2-(EX)^2=\lambda$

2. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，且

$X_k \sim N(\mu_k,\ \sigma_k^2)$，$k=1,2,\cdots,n$

用特征函数求随机变量$Y=\sum_{k=1}^{n} X_k$的概率分布

解：由题意$\varphi_{X_k}(u)=e^{j\mu_k u-\frac{1}{2}\sigma_k^2 u^2}$，$k=1,2,\ldots,n$

$$\therefore \varphi_Y(u)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}(u)=\prod_{k=1}^{n}e^{j\mu_k u-\frac{1}{2}\sigma_k^2 u^2}$$

$$=e^{j(\sum_{k=1}^{n}\mu_k)u-\frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2)u^2}$$

$$\therefore\quad Y=\sum_{k=1}^{n} X_k \sim N\left(\sum_{k=1}^{n}\mu_k,\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2\right)$$

定义 (随机过程的有限维特征函数族)

设 $\{X_t, t\in T\}$是一个S.P. 对于任意固定的 $t_1,t_2,\ldots,t_n\in T$, $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)$是n个随机变量,称

$$\varphi(t_1,t_2,\ldots,t_n;u_1,u_2,\ldots,u_n)$$

$$=E[e^{j(u_1X(t_1)+\cdots+u_nX(t_n))}]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\sum_{i=1}^{n}u_iX(t_i)}dF(t_1,\cdots t_n;x_1,\cdots x_n)$$

($u_i\in R$, $i=1,2,\ldots,n$)

为S. P. $\{X_t, t\in T\}$的n维特征函数.

称

$$\Phi = \{\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n; u_1, u_2, \ldots, u_n), \quad t_i \in T, u_i \in R, i = 1, 2, .., n\}$$

为随机过程的有限维特征函数族

➢ 随机过程的数字特征

1. 均值函数

设$X=\{X_t, t\in T\}$是一实值随机过程，对任意$t\in T$, 若

$E[X_t]$存在,

则称$E[X_t]$为随机过程X的 均值函数，记为$m_X(t)$，即

$$m_X(t)=E[X_t], \quad t\in T$$

2. 方差函数

设$X=\{X_t, t\in T\}$是一实值随机过程，对任意$t\in T$, 若

$$D[X_t]=E[X_t-m_X(t)]^2$$存在,

则称$D[X_t]$为随机过程X的方差函数， 记$D_X(t)$. 即

$$D_X(t)=E[X_t-m_X(t)]^2，\quad t\in T$$

3. 协方差函数

设$X=\{X_t, t\in T\}$是一实值随机过程，对任意$s,t\in T$，若

$$Cov(X_s, X_t)=E[X_s-m_X(s)][X_t-m_X(t)]\text{存在,}$$

则称$Cov(X_s, X_t)$为随机过程X的协方差函数.记 $C_X(s,t)$.即

$$C_X(s,t)=E[X_s-m_X(s)][X_t-m_X(t)] \quad s,t\in T$$

4. 相关函数

设$X=\{X_t, t\in T\}$是一实值随机过程，对任意$s,t\in T$,若

$$E[X_sX_t] \text{ 存在,}$$

则称$E[X_sX_t]$为随机过程Xt的相关函数. (自相关函数)

记$R_X(s,t)$.即

$$R_X(s,t)= E[X_sX_t] \quad s,t\in T$$

显然 $m_X(t)=0$时, $C_X(s,t)= R_X(s,t)$

5. 均方值函数

设$X=\{X_t, t\in T\}$是一实值随机过程，对任意$t\in T$, 若

$E[X_t]^2$存在

则称$E[X_t]^2$为随机过程X的均方值函数，记为$\Phi_X(t)$.即

$$\Phi_X(t)= E[X_t]^2 \quad t\in T$$

随机过程的数字特征有如下关系

$$C_X(s,t)=R_X(s,t)-m_X(s)m_X(t) \qquad s,t \in T$$

$$D_X(t)=C_X(t,t) \qquad t \in T$$

$$\Phi_X(t)=R_X(t,t) \qquad t \in T$$

最关键的数字特征是均值函数与相关函数

本节内容举例

1. 设S.P. X(t)=a*cos*(ωt+Θ). a, ω常数, Θ~U[0, 2π]
求该过程的均值函数,相关函数,方差函数.

解 $m_X(t)=E[X(t)]$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cdot a\cos(\omega t+\theta)d\theta$$

$$=0 \qquad -\infty<t<+\infty$$

$$R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}a^2\cos(\omega s+\theta)\cos(\omega t+\theta)d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\cos\omega(t-s), \qquad -\infty<s,t<+\infty$$

$$\because C_X(s,t) = R_X(s,t) - m_X(s)m_X(t)$$

$$= R_X(s,t)$$

$$= \frac{a^2}{2}\cos\omega(t-s), \qquad -\infty < s,t < +\infty$$

$$\therefore D_X(t) = C_X(t,t) = \frac{a^2}{2} \qquad -\infty < t < +\infty$$

2. 设S.P. X(t)=Acosωt+Bsinωt t≥0, ω为常数. A,B相互独立,同服从正态分布N(0,σ²) 求该过程的数字特征.

解 $m_X(t) = E[X(t)] = 0 \qquad -\infty < t < +\infty$

$$R_X(s,t) = E[X(s)X(t)]$$

$$= E[A^2]\cos\omega s\cos\omega t$$

$$+ E[AB](\sin\omega s\cos\omega t + \cos\omega s\sin\omega t)$$

$$+ E[B^2]\sin\omega s\sin\omega t$$

$$= \sigma^2\cos\omega(t-s) \quad -\infty < s,t < +\infty$$

两个随机过程的联合分布和 数字特征

在实际问题中,有时需要同时考虑两个或者两个以上的随机过程.例如:

一个线性系统的输入信号和输入噪声两者可能同为随机过程.

同时考虑一个线性系统的随机输入和随机输出的关系等.

随机过程可推广到

- 多维随机过程

定义 设$\{X_t,t\in T\}$和$\{Y_t,t\in T\}$是定义 在同一概率空间(Ω,F,P)上的两个实随机过程.

则称$\{X_t,Y_t, t\in T\}$是二维随机过程.

- 复随机过程

定义 设$\{X_t,t\in T\}$和$\{Y_t,t\in T\}$是定义在同一概率空间(Ω,F,P)上的两个实随机过程.令

$$Z_t= X_t+jY_t \quad t\in T$$

则称$\{Z_t, t\in T\}$是复随机过程.

两个随机过程的数字特征

互相关函数

设$\{X_t, Y_t,\ t \in T\}$是二维S.P. 对任意$s, t \in T$，若

$$E[X_s Y_t] \text{存在},$$

则称

$$E[X_s Y_t] = R_{X,Y}(s,t)$$

为该二维S.P.的 互相关函数

设$\{X_t, Y_t, t \in T\}$是二维S.P. 对任意$s,t \in T$，若

$$\mathrm{cov}(X_s, Y_t) = E[(X_s - m_X(s))(Y_t - m_Y(t))]$$存在,

则记 $\mathrm{cov}(X_s, Y_t) = C_{XY}(s,t)$
称为二维S.P.的互协方差函数

显然有 $C_{XY}(s,t) = R_{XY}(s,t) - m_X(s)m_Y(t)$

利用互协方差函数可以定义两个过程的相关

即 设$\{X_t, t\in T\}$, $\{Y_t, t\in T\}$是二个 S.P.若

$$C_{XY}(s,t)=0$$

或 $R_{X,Y}(s,t)= m_X(s)m_Y(t)$ $s,t\in T$,

则称S.P $\{X_t, t\in T\}$,与S.P $\{Y_t, t\in T\}$不相关.

复随机过程的数字特征

设$Z=\{Z_t, t\in T\}$是复随机过程， 对任意$t \in T$,称

$$m_Z(t)=E[Z_t]$$

为复随机过程Z的均值函数

称 $$D_Z(t)=D[Z_t]$$

$$=E| Z_t- m_Z(t)|^2$$

为复随机过程Z的方差函数

称 $\Phi_Z(t)=E|Z_t|^2$

为复随机过程Z的均方值函数.

对任意的s,t∈T, 称

$$R_Z(s,t)=E[\overline{Z_s}Z_t]$$

为复随机过程Z的相关函数.

称 $C_Z(s,t)=\mathrm{cov}(Z_s, Z_t)$

$$=E[\overline{(Z_s-m_z(s))}(Z_t-m_z(t))]$$

为复随机过程Z的协方差函数.

由以上定义可得

(1) $m_Z(t)=m_X(t)+jm_Y(t) \qquad t\in T$

(2) $D_Z(t)= D_X(t)+D_Y(t) \qquad t\in T$

(3) $C_X(s,t)=R_Z(s,t)-\overline{m_Z}(s)m_Z(t) \qquad s,t\in T$

举例

设 $Z_t=\sum_{k=1}^{n}X_k e^{j(\omega_0 t+\Phi_k)},t\in R,$ 其中**ω_0**为正常数，**n**为固定正整数，$X_1,X_2,\cdots,X_n,\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_n$ 是相互独立的实随机变量,且 $EX_k=0,DX_k=\sigma_k^2$,**Φ_k～U[0,2π],** **k=1,2,…,n.**

计算随机过程**Z={Z_t ,t**$\in$R}的均值函数和相关函数.

解 $m_Z(t)=\mathrm{E}[\sum_{k=1}^{n} X_k e^{j(\omega_0 t+\Phi_k)}]=0$

$$\mathrm{R}_Z(s,t)=\mathrm{E}[\overline{\sum_{k=1}^{n} X_k e^{j(\omega_0 s+\Phi_k)}}\cdot\sum_{k=1}^{n} X_k e^{j(\omega_0 t+\Phi_k)}]$$

$$=\mathrm{E}[\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} X_k X_l e^{-j(\omega_0 s+\Phi_k)} e^{j(\omega_0 t+\Phi_l)}]$$

$$=\mathrm{E}[\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} X_k X_l e^{j(\Phi_l-\Phi_k)}] e^{j\omega_0(t-s)}$$

$$=e^{j\omega_0(t-s)}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2$$

举例

设 $Z(t)=\sum_{k=1}^{n}X_k e^{j(\omega_0 t+\Phi_k)}, t\in R,$ 其中**ω** $_0$为正常数，**n**为固定正整数, $X_1, X_2,\cdots, X_n, \Phi_1, \Phi_2,\cdots,\Phi_n$ 是相互独立的实随机变量,且 $EX_k=0, DX_k=\sigma_k^2$, $\boldsymbol{\Phi_k}$～**U[0,2π],**

k=1,2,…,n.

求**S.P.{Z(t),t**∈R} 的均值函数和相关函数.

解 $$m_Z(t)=\mathrm{E}[\sum_{k=1}^{n}X_k e^{j(\omega_0 t+\Phi_k)}]=0$$

$$\mathrm{R}_Z(s,t)=\mathrm{E}[\overline{\sum_{k=1}^{n}X_k e^{j(\omega_0 s+\Phi_k)}}\cdot\sum_{k=1}^{n}X_k e^{j(\omega_0 t+\Phi_k)}]$$

$$=\mathrm{E}[\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}X_k X_l e^{-j(\omega_0 s+\Phi_k)}e^{j(\omega_0 t+\Phi_l)}]$$

$$=\mathrm{E}[\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}X_k X_l e^{j(\Phi_l-\Phi_k)}]e^{j\omega_0(t-s)}$$

$$=e^{j\omega_0(t-s)}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2$$