

随机过程：第三章

薄立军

理学院数学系概率与统计教研室

参考书：《随机过程-计算与应用》

内容

1 布朗运动

- 布朗运动的性质
- BM 轨道的不可微性
- 与 BM 相关的随机过程
- BM 的仿真

1 布朗运动

- 布朗运动的性质
- BM 轨道的不可微性
- 与 BM 相关的随机过程
- BM 的仿真

- BM 发展历史:

- (1). 1827 年, 苏格兰植物学家 罗伯特 · 布朗 通过显微镜观察悬浮在水中的花粉颗粒的运动, 发现这些微小颗粒一直在做大量无规则的运动。
- (2). 1900 年, 法国数学家 路易斯 · 巴舍利 耶首次在他的博士论文《投机理论》中, 给出了一种 BM 的量化理论, 并用这种量化的布朗运动来描述金融市场中股票价格的波动。

- (3). 1905 年, 爱因斯坦 根据分子热运动理论推导出了布朗运动的转移密度, 从而首次给出了 BM 的一种概率模型, 因此得出分子是在做随机运动的结论。
- (4). 1923 年, 美国数学家、控制论创始人 诺伯特 · 维纳 用严格的数学理论定义了 BM, 并首次给出了 BM 存在性的数学证明。
- (5). 1923 年以后, 法国概率学家 保罗 · 莱维 用插值方法给出了布朗运动第二种存在性证明, 并研究了布朗运动的首中时、相关泛函以及样本轨道的有限结构性质等。

1 布朗运动

- 布朗运动的性质
- BM 轨道的不可微性
- 与 BM 相关的随机过程
- BM 的仿真

布朗运动的性质

(a). 对称性: $-W$ 是 BM.

这是因为

$$-W_t - (-W_s) = -(W_t - W_s) \sim N(0, t-s), \quad 0 \leq s \leq t$$

(b). 自相似性: $\forall a > 0$ 和 $t > 0$, 有 $W_{at} \doteq a^{\frac{1}{2}} W_t$.

这是因为

$$W_{at} \sim N(0, at), \text{ 而 } a^{\frac{1}{2}} W_t \sim N(0, (\sqrt{a})^2 t)$$

布朗运动的性质

(c). 时间逆转变性: $\forall T > 0$, 定义 BM 的时间逆转变过程

$$B_t = W_T - W_{T-t}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

则 $B = \{B_t : 0 \leq t \leq T\}$ 也是一个 BM.

这是因为

$$B_t - B_s = W_{T-s} - W_{T-t} \sim N(0, t-s), \quad 0 \leq t \leq T.$$

布朗运动的性质

Theorem

$\forall t > 0$, 考虑 $[0, t]$ 的一个划分

$$\pi_n : \quad 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = t, \quad n \in \mathbb{N}.$$

定义 $\Delta W_k = W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$ 和 $|\pi_n| = \max_{k=1, \dots, n} (t_k - t_{k-1})$.
 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} |\pi_n| = 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left| \sum_{k=1}^n (\Delta W_k)^2 - t \right|^2 \right] = 0.$$

证: r.v.s $\Delta W_1, \dots, \Delta W_n$ 是独立的, 且 $\Delta W_k \sim N(0, t_k)$.

布朗运动的性质

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[\left| \sum_{k=1}^n (\Delta W_k)^2 - t \right|^2 \right] = \mathbb{E} \left[\left| \sum_{k=1}^n [(\Delta W_k)^2 - \Delta t_k] \right|^2 \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\sum_{k,l=1}^n [(\Delta W_k)^2 - \Delta t_k][(\Delta W_l)^2 - \Delta t_l] \right] \\
 &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E} [|(\Delta W_k)^2 - \Delta t_k|^2] + \sum_{k \neq l} \mathbb{E}[(\Delta W_k)^2 - \Delta t_k] \\
 &\quad \times \mathbb{E}[(\Delta W_l)^2 - \Delta t_l] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E} [|(\Delta W_k)^2 - \Delta t_k|^2] \\
 &= \sum_{k=1}^n [\mathbb{E}(\Delta W_k)^4 - 2\Delta t_k \mathbb{E}(\Delta W_k)^2 + (\Delta t_k)^2] = 2 \sum_{k=1}^n (\Delta t_k)^2.
 \end{aligned}$$

布朗运动的性质

- $\forall t > 0$, r.v.s 列

$$\left\{ \sum_{k=1}^n (\Delta W_k)^2 : n \in \mathbb{N} \right\}$$

均方收敛到 t .

- 均方极限 $\langle W \rangle_t = t$ 称为 BM 的 二次变差.

布朗运动的性质

- 例题：称下面的量：

$$V = \max_{\{\pi_n: n \in \mathbb{N}\}} \sum_{k=1}^n |\Delta W_k|$$

为 BM W 的一次变差 (或称全变差), 则

$$\mathbb{P}(V = +\infty) = 1.$$

布朗运动的性质

- 证：用反证法。假设 $V < +\infty$, a.e., 则当 $n \rightarrow \infty$,

$$0 \leq \sum_{k=1}^n (\Delta W_k)^2 \leq V \max_{k=1, \dots, n} |\Delta W_k| \rightarrow 0, \quad a.e.$$

这与 $\sum_{k=1}^n (\Delta W_k)^2$ 均方收敛到 $\langle W \rangle_t = t$ 矛盾。

1 布朗运动

- 布朗运动的性质
- BM 轨道的不可微性
- 与 BM 相关的随机过程
- BM 的仿真

BM 轨道的不可微性

Theorem

设 $\Delta t > 0$, 对于固定的 $t > 0$, 定义增量 $\Delta W_t = W_{t+\Delta t} - W_t$.
则 $\forall x > 0$ 和时刻 $t > 0$ 有

$$\mathbb{P}\left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \left| \frac{\Delta W_t}{\Delta t} \right| > x\right) = 1.$$

BM 轨道的不可微性

证：设 r.v. $\xi = \Delta W_t$, 则 $\xi \sim N(0, \Delta t)$. 用 BM 和概率测度性质有：

BM 轨道的不可微性

$$\begin{aligned}\mathbb{P} \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \left| \frac{\Delta W_t}{\Delta t} \right| > x \right) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \mathbb{P} \left(\left| \frac{\Delta W_t}{\Delta t} \right| > x \right) \\&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \mathbb{P} (|\xi| > x\Delta t) \\&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \int_{x\Delta t}^{+\infty} \exp \left(-\frac{y^2}{2\Delta t} \right) dy \\&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{x\sqrt{\Delta t}}^{+\infty} \exp \left(-\frac{z^2}{2} \right) dz \\&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \exp \left(-\frac{z^2}{2} \right) dz = 1.\end{aligned}$$

1 布朗运动

- 布朗运动的性质
- BM 轨道的不可微性
- 与 BM 相关的随机过程
- BM 的仿真

与 BM 相关的随机过程

- 过程 1: d -维 SBM:

若 W^1, \dots, W^d 是 d 个相互独立的 SBM, 则称

$$\mathbf{W} = (W^1, \dots, W^d)$$

为 d -维 SBM.

与 BM 相关的随机过程

- 过程 2: (μ, σ^2) -BM:

$$B_t^{\mu, \sigma^2} = \mu t + \sigma W_t, \quad \forall t \geq 0$$

- 均值函数 $m_{B^{\mu, \sigma^2}}(t) = \mu t$
- 相关函数 $R_{B^{\mu, \sigma^2}}(s, t) = \mu^2 st + \sigma^2 s \wedge t$

与 BM 相关的随机过程

- 证明: (μ, σ^2) -BM 是正态过程.

证: 任取 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$. 对 $k = 1..n$, 定义 $\xi_k = B_{t_k}^{\mu, \sigma^2} - B_{t_{k-1}}^{\mu, \sigma^2}$. 则 ξ_1, \dots, ξ_n 是相互独立的且

$$\xi_k \sim N(\mu(t_k - t_{k-1}), \sigma^2(t_k - t_{k-1})).$$

故 (ξ_1, \dots, ξ_n) 服从 n 维正态.

与 BM 相关的随机过程

由于

$$(B_{t_1}^{\mu, \sigma^2}, B_{t_2}^{\mu, \sigma^2}, \dots, B_{t_n}^{\mu, \sigma^2}) = (\xi_1, \dots, \xi_n) \times M_{n \times n}.$$

故 $(B_{t_1}^{\mu, \sigma^2}, \dots, B_{t_n}^{\mu, \sigma^2})$ 服从 n 维正态分布.

与 BM 相关的随机过程

- 过程 3: 从 0 到 0 的布朗桥:

$$B_t^{br} = W_t - tW_1, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

- 均值函数 $m_{B^{br}}(t) = 0$
- 相关函数 $R_{B^{br}}(s, t) = s \wedge t - st$
- 布朗桥 B^{br} 是正态过程

与 BM 相关的随机过程

- 例：从 a 到 b 的布朗桥：

$$B_t^{a \rightarrow b} = a + (b - a)t + B_t^{br}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

- 均值函数 $m^{a \rightarrow b}(t) = a + (b - a)t$
- 协方差函数 $C^{a \rightarrow b}(s, t) = s \wedge t - st$
- 布朗桥 $B^{a \rightarrow b}$ 是正态过程

与 BM 相关的随机过程

- 过程 4: 几何 BM (GBM):

$$B_t^{ge} = \exp\left(B_t^{\mu, \sigma^2}\right), \quad t \geq 0.$$

- 均值函数 $m_{B^{ge}}(t) = \exp\left\{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right\}$
- 相关函数 $R_{B^{ge}}(s, t) = e^{\mu(t+s)} e^{2\sigma^2 s} e^{\frac{\sigma^2}{2}(t-s)}, \quad s < t$

与 BM 相关的随机过程

- 过程 5: 反射 BM (RBM):

$$B_t^{re} = |W_t|, \quad t \geq 0.$$

- 均值函数:

$$m_{B^{re}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| \varphi_t(y) dy = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}$$

与 BM 相关的随机过程

- 相关函数 $R_{B^{re}}(s, t)$:

考虑 $0 \leq s < t$. 设 r.v. $\xi = W_t - W_s$, $\eta = W_s$, 则

$$\begin{aligned} R_{B^{re}}(s, t) &= \mathbb{E}[|\eta||\xi + \eta|] = \int_{\mathbb{R}^2} |y||x + y| \varphi_{t-s}(x)\varphi_s(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x + y| \varphi_{t-s}(x) dx \right) |y| \varphi_s(y) dy \end{aligned}$$

与 BM 相关的随机过程

- 过程 6: 奥恩斯坦-乌伦贝克 (OU) 过程:

$$B_t^{ou} = e^{-\alpha t} W_{\gamma(t)}, \quad t \geq 0,$$

其中 $\gamma(t) = \int_0^t e^{2\alpha s} ds.$

- 均值函数:

$$m_{B^{ou}}(t) = \mathbb{E} [e^{-\alpha t} W_{\gamma(t)}] = e^{-\alpha t} \mathbb{E} [W_{\gamma(t)}] = 0$$

与 BM 相关的随机过程

- 相关函数 $R_{Bou}(s, t)$:

考虑 $0 \leq s < t$. $t \rightarrow \gamma(t)$ 单增, 则

$$\begin{aligned} R_{Bou}(s, t) &= e^{-\alpha(s+t)} \mathbb{E} [W_{\gamma(s)} W_{\gamma(t)}] \\ &= e^{-\alpha(s+t)} \mathbb{E} [W_{\gamma(t)-\gamma(s)}] \mathbb{E} [W_{\gamma(s)}] \\ &\quad + e^{-\alpha(s+t)} \mathbb{E} [|W_{\gamma(s)}|^2] \\ &= e^{-\alpha(s+t)} \mathbb{E} [|W_{\gamma(s)}|^2] \\ &= \gamma(s) e^{-\alpha(s+t)}. \end{aligned}$$

1 布朗运动

- 布朗运动的性质
- BM 轨道的不可微性
- 与 BM 相关的随机过程
- BM 的仿真

BM 的仿真

- BM 样本轨道的仿真:

$\forall T > 0$, 对时间区间 $[0, T]$ 取一划分. 例如这里取小的时间增量 $\Delta T = \frac{T}{N}$ 其中 N 是一自然数. 定义 $t_j = j \cdot \Delta T$ 和增量 $\Delta W_k = W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$ 当 $k = 0, \dots, N$. 故 t_{j+1} 时 BM 状态:

$$W_{t_{j+1}} = \sum_{k=0}^j \Delta W_k, \quad j = 0, \dots, N.$$

BM 的仿真

由于 $\Delta W_k \sim N(0, \frac{T}{N})$, 我们用下面 Matlab[©] 代码仿真:

$$\frac{T}{N} * randn(1, N)$$

BM 的仿真

- 最终的仿真代码:

```
DT = T/N; dW = zeros(1,N);
randn('state',0);
dW = sqrt(DT)*randn(1,N);
```

BM 的仿真

因此 BM 状态向量 $(W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_N})$ 可用如下代码实现:

$$W = \text{cumsum}(dW);$$

用下面代码可画出一条 BM 的仿真样本轨道:

$$\text{plot}([0:dt:T], [0,W], 'k-');$$