

Lecture 6 MIMO 信道模型

2021-4-16

本章主要讨论 MIMO 信道的物理和统计模型。

1、SIMO/MISO 信道 LOS 模型

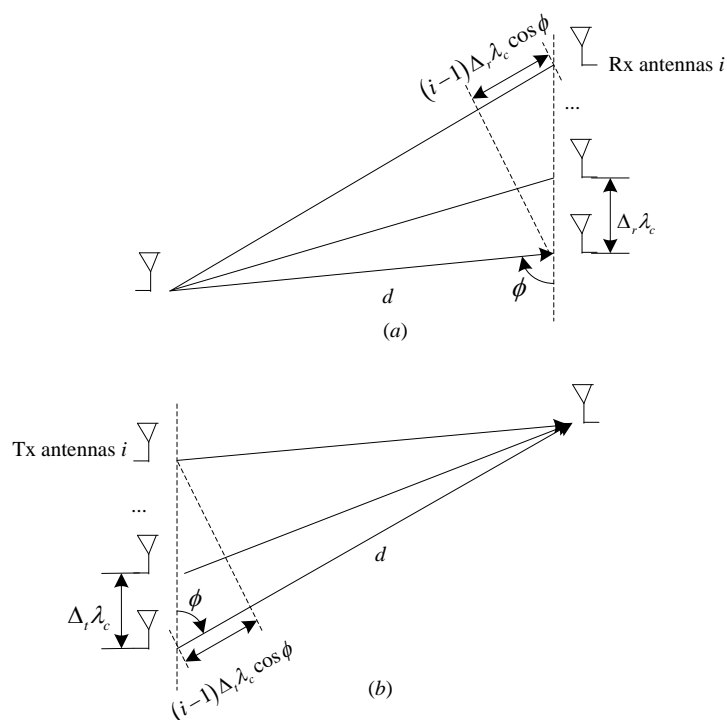


图 6-1. SIMO 和 MISO 的 LOS 信道。

考虑如图 6-1(a)的 SIMO LOS 模型。接收天线采用均匀线性阵列 (ULA) 排列, 向量天线间隔为 $\Delta_r \lambda_c$ 。其中 λ_c 为载波波长, Δ_r 为归一化天线间隔。进一步假设 ULA 天线阵列大小远小于收发天线距离。

发送天线和第 i 根接收天线对应的信道响应为

$$h_i(\tau) = a\delta(\tau - d_i/c), \quad i = 1, \dots, n_r \quad (1)$$

其中, a 是路径衰减, d_i 是发送天线到第 i 根接收天线的距离, c 是光速。对应的基带信道增益为

$$h_i = a \exp\left(-\frac{j2\pi f_c d_i}{c}\right) = a \exp\left(-\frac{j2\pi d_i}{\lambda_c}\right) \quad (2)$$

其中 f_c 是载频。

令发送天线到第 1 根接收天线之间的距离为 d ，在 ULA 天线阵列大小远小于收发天线之间距离的假设下， d_i 可以按照下式计算

$$d_i \approx d + (i-1)\Delta_r \lambda_c \cos \phi, \quad i=1, \dots, n_r \quad (3)$$

其中 ϕ 是 LOS 传输路径到达接收天线阵的入射角。定义方向余弦 $\Omega = \cos \phi$ ，信道空间特征 (spatial signature)

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_{n_r} \end{pmatrix} = a \exp\left(-\frac{j2\pi d}{\lambda_c}\right) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \exp(-j2\pi\Delta_r\Omega) \\ \exp(-j2\pi2\Delta_r\Omega) \\ \vdots \\ \exp(-j2\pi(n_r-1)\Delta_r\Omega) \end{pmatrix}}_{\sqrt{n_r}\mathbf{e}_r(\Omega)} \\ &= a\sqrt{n_r} \exp\left(-\frac{j2\pi d}{\lambda_c}\right) \mathbf{e}_r(\Omega) \end{aligned} \quad (4)$$

同样的，MISO LOS 信道空间特征可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_{n_t} \end{pmatrix} = a \exp\left(-\frac{j2\pi d}{\lambda_c}\right) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \exp(j2\pi\Delta_r\Omega) \\ \exp(j2\pi2\Delta_r\Omega) \\ \vdots \\ \exp(j2\pi(n_t-1)\Delta_r\Omega) \end{pmatrix}}_{\sqrt{n_t}\mathbf{e}_t^*(\Omega)} \\ &= a\sqrt{n_t} \exp\left(-\frac{j2\pi d}{\lambda_c}\right) \mathbf{e}_t^*(\Omega) \end{aligned} \quad (4)$$

此时， ϕ 是 LOS 传输路径离开发送天线阵的离开角， Δ_r 为归一化发送天线间隔。

2、MIMO 信道 LOS 模型

由上述 SIMO 和 MISO LOS 模型得到仅存在 LOS 时 MIMO 信道的空间特征。首先发送天线 k 与接收天线 i 之间的距离可表示为

$$d_{ik} \approx d - (i-1)\Delta_r \lambda_c \cos \phi_r + (k-1)\Delta_t \lambda_c \cos \phi_t \quad (5)$$

其中 ϕ_r 和 ϕ_t 分别表示到达角和离开角。定义方向余弦 $\Omega_r = \cos \phi_r$ ， $\Omega_t = \cos \phi_t$ ，发送天线 k 与接收天线 i 信道系数可表示为

$$h_{ki} = a \exp\left(-\frac{j2\pi d}{\lambda_c}\right) \exp(j2\pi(k-1)\Delta_r\Omega_r) \exp(-j2\pi(i-1)\Delta_r\Omega_r) \quad (6)$$

整个收发端信道矩阵可表示为

$$\mathbf{H} = a\sqrt{n_t n_r} \exp\left(-\frac{j2\pi d}{\lambda_c}\right) \mathbf{e}_r(\Omega_r) \mathbf{e}_t^*(\Omega_t) \quad (7)$$

显然该矩阵是秩 1 矩阵，其唯一的奇异值为 $a\sqrt{n_t n_r}$ 。

3、天线分离配置情况

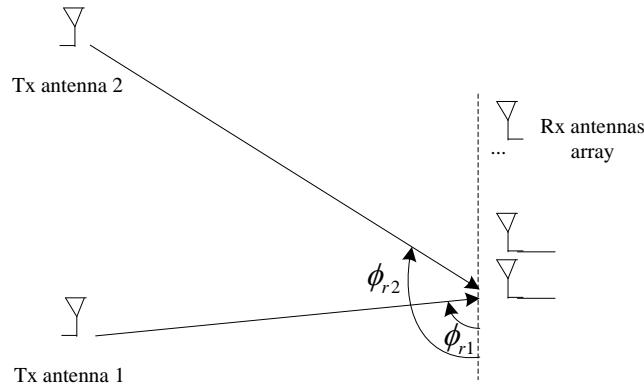


图 6-2. 两个发送天线之间距离和收发天线阵之间距离相当时 MIMO LOS 信道。

在上述讨论中，我们假定收发天线阵的大小远小于收发天线阵之间的距离，因子在仅有 LOS 时 MIMO 信道矩阵秩为 1。当各个发送或接收天线分离放置时，MIMO LOS 信道的秩可以大于 1。考虑两个发送天线之间距离和收发天线阵之间距离相当的情况，如图 6-2 所示，不同发送天线对应的信道为

$$\mathbf{h}_k = a_k \sqrt{n_r} \exp\left(-\frac{j2\pi d_{1k}}{\lambda_c}\right) \mathbf{e}_r(\Omega_{rk}), \quad k = 1, 2 \quad (8)$$

其中 d_{1k} 是第 k 根发送天线到第 1 根接收天线的距离，方向余弦 $\Omega_{rk} = \cos \phi_{rk}$ 。

按照 $\mathbf{e}_r(\Omega_{rk})$ 的定义（式（4）），当

$$\Omega_r = \Omega_{r2} - \Omega_{r1} \neq 0 \pmod{\frac{1}{\Delta_r}} \quad (9)$$

时，MIMO LOS 信道矩阵 $\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2]$ 中两列线性独立，因此秩为 2。另外，注意到方向余弦在 $[-1, 1]$ 之间取值，当 $\Delta_r \leq 1/2$ 时，条件（9）松弛为 $\Omega_{r2} \neq \Omega_{r1}$ 。

在满秩的情况下，提高 MIMO 信道容量，信道矩阵 \mathbf{H} 还应该具有尽量小的条件数（定

义为最大与最小奇异值的比值)。直观上看， \mathbf{h}_1 和 \mathbf{h}_2 的方向越接近，条件数越大。因此，定义 \mathbf{h}_1 和 \mathbf{h}_2 的夹角 θ ：

$$|\cos \theta| = \left| \mathbf{e}_r(\Omega_{r1})^H \mathbf{e}_r(\Omega_{r2}) \right| \quad (10)$$

显然上式只与方向余弦的差值 $\Omega_r = \Omega_{r2} - \Omega_{r1}$ 有关，因此进一步定义

$$f_r(\Omega_r) = \mathbf{e}_r(\Omega_{r1})^H \mathbf{e}_r(\Omega_{r2}) \quad (11)$$

且有

$$\begin{aligned} f_r(\Omega_r) &= \frac{1}{n_r} \sum_{i=0}^{n_r-1} \exp(j2\pi i \Delta_r \Omega_{r1}) \exp(-j2\pi i \Delta_r \Omega_{r2}) \\ &= \frac{1}{n_r} \sum_{i=0}^{n_r-1} \exp(-j2\pi i \Delta_r \Omega_r) = \frac{1}{n_r} \frac{1 - \exp(-j2\pi n_r \Delta_r \Omega_r)}{1 - \exp(-j2\pi \Delta_r \Omega_r)} \\ &= \frac{1}{n_r} \frac{\exp(-j\pi n_r \Delta_r \Omega_r) \exp(j\pi n_r \Delta_r \Omega_r) - \exp(-j\pi n_r \Delta_r \Omega_r)}{\exp(-j\pi \Delta_r \Omega_r) \exp(j\pi \Delta_r \Omega_r) - \exp(-j\pi \Delta_r \Omega_r)} \\ &= \frac{1}{n_r} \frac{\exp(-j\pi n_r \Delta_r \Omega_r) \sin(\pi n_r \Delta_r \Omega_r)}{\exp(-j\pi \Delta_r \Omega_r) \sin(\pi \Delta_r \Omega_r)} \\ &= \frac{1}{n_r} \exp(-j\pi(n_r-1)\Delta_r \Omega_r) \frac{\sin(\pi L_r \Omega_r)}{\sin(\pi L_r \Omega_r / n_r)} \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $L_r = \Delta_r n_r$ 称为归一化的接收天线阵大小。将 (12) 代入 (10)，有

$$|\cos \theta| = \left| \frac{\sin(\pi L_r \Omega_r)}{\sin(\pi L_r \Omega_r / n_r)} \right| \quad (13)$$

考虑 $a_1 = a_2 = a$ ，信道矩阵 \mathbf{H} 的两个奇异值为

$$\lambda_1^2 = a^2 n_r (1 + |\cos \theta|), \quad \lambda_2^2 = a^2 n_r (1 - |\cos \theta|) \quad (14)$$

对应的条件数为

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sqrt{\frac{1 + |\cos \theta|}{1 - |\cos \theta|}} \quad (15)$$

从上式可以看出，当 $|\cos \theta| \approx 1$ 时，条件数非常大， \mathbf{H} 为病态矩阵。

进一步， $f_r(\Omega_r)$ 有如下特性：1) 周期为 $n_r/L_r = 1/\Delta_r$ ；2) 峰值 $f_r(\Omega_r = 0) = 1$ ；3)

$f_r(\Omega_r = k/L_r) = 0, k = 1, \dots, n_r - 1$ 。此外， $f_r(\Omega_r)$ 在 $1/\Delta_r$ 的整数倍为中心的主瓣宽带为

$2/L_r$ 。根据 $|\cos \theta| = |f_r(\Omega_r)|$ 和 (15) 式, 当

$$\begin{aligned} \left| \Omega_r - \frac{m}{\Delta_r} \right| &\ll \frac{1}{L_r}, \text{ for some } m \\ \text{i.e., } |\Omega_r| &\ll \frac{1}{L_r}, \text{ if } \Delta_r \leq \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (16)$$

时, 信道矩阵为病态矩阵。一般将 $1/L_r$ 称为角度域分辨率, 当 $\Omega_r \ll 1/L_r$ 时两根发送天线在接收天线阵处的信号不能区分, 因此信道自由度为 1。

波束图样是角度域的分辨率的另一种表示方法, 假设信号到达方向为 ϕ_0 , 最佳接收机将该信号投影到 $\mathbf{e}_r(\cos \phi_0)$ 方向。此时, 来自其他方向 ϕ 的信号在该接收机下的衰减为

$$\left| \mathbf{e}_r(\cos \phi_0)^H \mathbf{e}_r(\cos \phi) \right| = |f_r(\cos \phi - \cos \phi_0)| \quad (17)$$

定义 $\mathbf{e}_r(\cos \phi_0)$ 方向相关的波束图样为

$$\left(\phi_0, |f_r(\cos \phi - \cos \phi_0)| \right) \quad (18)$$

该波束图样具有两个重要特性。首先, 根据 $f_r(\cdot)$ 的周期性, 其主瓣中心点为 ϕ_0 及满足如下条件的 ϕ

$$\cos \phi = \cos \phi_0 \pmod{\frac{1}{\Delta_r}} \quad (19)$$

显然, 当 $\Delta_r \leq 0.5$, 上述条件简化为 $\cos \phi = \cos \phi_0$, 在 $[0, \pi]$ 之间仅有一个主瓣。其次, 主瓣的方向余弦宽度即波束宽度为 $2/L_r$ 。 L_r 越大, 波束宽度越小, 角度分辨率越高。

Remark 1: 角度域分辨率 $1/L_r$ 类似于时域分辨率 $1/W$ (W 为信道带宽)。当多径到达时延差小于时域分辨率 $1/W$ 时, 这些路径在时间上不可分; 当不同信号的到达角之差小于角度域分辨率 $1/L_r$, 这些路径在角度域上不可分。此外, 正如过采样不能提高时间分辨率一样, 在 L_r 固定时增加天线数目并不能提高角度分辨率。

接收天线分离配置情况下的信道和上述发送天线分离配置情况类似。

4、LOS+一条反射路径时的信道模型

考虑除了 LOS 外, 还存在一条反射路径的情况。两条路径的衰减、离开角及其方向余弦和

到达角及其余弦分别记为 $a_i, \phi_i, \Omega_{ii} = \cos \phi_{ii}, \phi_{ri}, \Omega_{ri} = \cos \phi_{ri}$ 。则信道 \mathbf{H} 可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= a_1^b \mathbf{e}_r(\Omega_{r1}) \mathbf{e}_t^*(\Omega_{t1}) + a_2^b \mathbf{e}_r(\Omega_{r2}) \mathbf{e}_t^*(\Omega_{t2}) \\ &= (a_1^b \mathbf{e}_r(\Omega_{r1}), a_2^b \mathbf{e}_r(\Omega_{r2})) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_t^*(\Omega_{t1}) \\ \mathbf{e}_t^*(\Omega_{t2}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

其中

$$a_i^b = a_i \sqrt{n_t n_r} \exp\left(-\frac{j2\pi d^{(i)}}{\lambda_c}\right), \quad i=1,2 \quad (21)$$

上式中 $d^{(i)}$ 表示路径 i 上第 1 根发送天线和第 1 根接收天线之间的距离。

类似的，只要满足条件

$$\Omega_{r2} \neq \Omega_{r1} \bmod \frac{1}{\Delta_r}, \quad \Omega_{t2} \neq \Omega_{t1} \bmod \frac{1}{\Delta_t} \quad (22)$$

矩阵 \mathbf{H} 的秩为 2。进一步为了获得良好的条件数，要求两条路径在收发天线阵的方向余弦差值 $|\Omega_r| = |\Omega_{r2} - \Omega_{r1}|, |\Omega_t| = |\Omega_{t2} - \Omega_{t1}|$ 至少分别和 $1/L_r$ 以及 $1/L_t$ 相当。

5、MIMO 多径信道模型

由 2 条径推广到多径，MIM 多径信道 \mathbf{H} 一般可以表示为

$$\mathbf{H} = \sum_i a_i^b \mathbf{e}_r(\Omega_{ri}) \mathbf{e}_t^*(\Omega_{ti}) \quad (23)$$

注意到，从 (11) (12) 有

$$f_r(\Omega) = \mathbf{e}_r(0)^H \mathbf{e}_r(\Omega) = \frac{1}{n_r} \exp(-j\pi(n_r-1)\Delta_r\Omega) \frac{\sin(\pi L_r \Omega)}{\sin(\pi L_r \Omega/n_r)} \quad (24)$$

进一步，

$$f_r\left(\frac{k}{L_r}\right) = 0, \quad k=1,2,\dots,n_r-1 \quad (25)$$

因此，集合

$$\mathcal{S}_r = \left\{ \mathbf{e}_r(0), \mathbf{e}_r\left(\frac{1}{L_r}\right), \dots, \mathbf{e}_r\left(\frac{n_r-1}{L_r}\right) \right\} \quad (26)$$

构成了接收信号空间的一组正交基。同样的，集合

$$\mathcal{S}_t = \left\{ \mathbf{e}_t(0), \mathbf{e}_t\left(\frac{1}{L_t}\right), \dots, \mathbf{e}_t\left(\frac{n_t-1}{L_t}\right) \right\} \quad (26)$$

构成了发送信号空间的一组正交基。

定义 $\mathbf{U}_t \in \mathbb{C}^{n_t \times n_t}$ 和 $\mathbf{U}_r \in \mathbb{C}^{n_r \times n_r}$ 分别由 \mathcal{S}_t 和 \mathcal{S}_r 中所有正交向量构成的矩阵，即

$$\begin{aligned} (\mathbf{U}_t)_{k,l} &= \frac{1}{\sqrt{n_t}} \exp\left(-j2\pi l \Delta_t \frac{k}{L_t}\right) = \frac{1}{\sqrt{n_t}} \exp\left(-j2\pi \frac{kl}{n_t}\right) \\ (\mathbf{U}_r)_{k,l} &= \frac{1}{\sqrt{n_r}} \exp\left(-j2\pi l \Delta_r \frac{k}{L_r}\right) = \frac{1}{\sqrt{n_r}} \exp\left(-j2\pi \frac{kl}{n_r}\right) \end{aligned} \quad (27)$$

显然 \mathbf{U}_t 和 \mathbf{U}_r 为归一化的离散傅里叶变换 DFT 矩阵。定义 \mathbf{x} 和 \mathbf{x}^a 分别为发送信号及其角度域表示，则有

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}_t \mathbf{x}^a, \quad \mathbf{x}^a = \mathbf{U}_t^H \mathbf{x} \quad (28)$$

此时其角度域接收信号可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^a &= \mathbf{U}_r^H \mathbf{y} = \mathbf{U}_r^H (\mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{w}) \\ &= \underbrace{\mathbf{U}_r^H \mathbf{H} \mathbf{U}_t}_{\mathbf{H}^a} \mathbf{x}^a + \underbrace{\mathbf{U}_r^H \mathbf{w}}_{\mathbf{w}^a} = \mathbf{H}^a \mathbf{x}^a + \mathbf{w}^a \end{aligned} \quad (29)$$

注意到 \mathbf{H}^a 的元素

$$(\mathbf{H}^a)_{k,l} = \mathbf{e}_r \left(\frac{k}{L_r} \right)^H \mathbf{H} \mathbf{e}_t \left(\frac{l}{L_t} \right) = \sum_i a_i^b \left[\mathbf{e}_r \left(\frac{k}{L_r} \right)^H \mathbf{e}_r(\Omega_{ri}) \right] \left[\mathbf{e}_t(\Omega_{ri})^H \mathbf{e}_t \left(\frac{l}{L_t} \right) \right] \quad (30)$$

并且 $\mathbf{e}_r \left(\frac{k}{L_r} \right)$ 和 $\mathbf{e}_t \left(\frac{l}{L_t} \right)$ 的主瓣带宽分别为 $2/L_r$ 和 $2/L_t$ ，即角度分辨率分别为 $1/L_r$ 和 $1/L_t$ 。

定义

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_k &= \{i \mid |\Omega_{ri} - k/L_r| < 1/L_r\} \\ \mathcal{T}_l &= \{i \mid |\Omega_{ri} - l/L_t| < 1/L_t\} \end{aligned} \quad (31)$$

因此在集合 $\mathcal{R}_k \cap \mathcal{T}_l$ 中路径既不能在发送天线阵的角度域区分开也不能在接收天线阵的角度域区分开。

当不存在属于 $\mathcal{R}_k \cap \mathcal{T}_l$ 的路径时有 $(\mathbf{H}^a)_{k,l} = 0$ 。事实上当仅在发送端附近或接收端附近存在反射/散射路径时，角度域信道矩阵 \mathbf{H}^a 通常是稀疏的。在该情况下，将非稀疏的 \mathbf{H} 转化为稀疏的角度域 \mathbf{H}^a ，能极大方便信号处理。

另外，如果每一个集合 $\mathcal{R}_k \cap \mathcal{T}_l$ 中都存在很多条路径，即丰富散射环境，此时根据中心极限定理，可将 \mathbf{H}^a 中所有元素建模为独立高斯分布，即建模为瑞利衰落信道。在后续章节中，除非特别说明，均假定 \mathbf{H} 和 \mathbf{H}^a 为瑞利分布。

Remark 2: 收发端角度域分辨率分别为 $1/L_t$ 和 $1/L_r$ ，收发端不同方向余弦的最大差值为 2，因此收发端的最大可分辨的角度数目分别为 $2L_t$ 和 $2L_r$ 。因此 MIMO 信道的最大自由度为 $\min(2L_t, 2L_r)$ 。当 $\Delta_t = \Delta_r = \mathfrak{D}$ 时(临界天线间距离)，最大自由度为 $\min(n_t, n_r)$ 。同时最大分集度为 $n_t n_r$ 。