Lecture 4 衰落信道容量

2021-3-26

之前讨论了无线衰落信道对误码性能的影响，本部分讨论其对信道容量的影响。

1、线性时不变（LTI）固定高斯信道容量

首先讨论信道固定时 LTI 信道的条件容量，分布针对 SIMO、MISO 和单天线频选信道分析其容量。

1）SIMO 信道

SIMO 信道信号模型表示为

$$y_n = h_n x + w_n,\ n = 1,\ldots,N_r \tag{1}$$

其中，$E\left[|x|^2\right] \le P$，$N_r$ 表示接收天线数目，h_n 表示发送端到第 n 根接收天线的信道，$w_n \sim \mathcal{CN}\left(0, N_0\right)$ 表示加性高斯噪声。显然，接收信号采用 MRC/MF 处理后为

$$\frac{\mathbf{h}^H \mathbf{y}}{\|\mathbf{h}\|} = \|\mathbf{h}\| x + \frac{\mathbf{h}^H \mathbf{w}}{\|\mathbf{h}\|} \tag{2}$$

其中 $\frac{\mathbf{h}^H \mathbf{w}}{\|\mathbf{h}\|} \sim \mathcal{CN}\left(0, N_0\right)$。因此接收端 SNR 为

$$SNR = \frac{\|\mathbf{h}\|^2 P}{N_0} \tag{3}$$

对应信道容量为

$$C = C\left(SNR\right) = \log_2\left(1 + \frac{\|\mathbf{h}\|^2 P}{N_0}\right) \tag{4}$$

2）MISO 信道

假设发送端已知 CSI（即 CSIT），数据符号 s 首先根据 CSI 进行预编码得到发送信号 $\mathbf{x} = \mathbf{u}s \in \mathbb{C}^{N_t}$，经过固定衰落 $\mathbf{h} \in \mathbb{C}^{N_t}$ 和 AWGN 后，接收信号为

$$y = \mathbf{h}^T \mathbf{x} + w = \mathbf{h}^T \mathbf{u} s + w \tag{5}$$

其中 $w \sim \mathcal{CN}\left(0, N_0\right)$ 为加性高斯噪声，$E\left[|s|^2\right] \le P$，预编码向量满足约束 $\|\mathbf{u}\| = 1$。

接收端 SNR 为

$$SNR = \frac{\left|\mathbf{h}^T\mathbf{u}\right|^2 P}{N_0} \tag{6}$$

根据柯西公式有

$$\left|\mathbf{h}^T\mathbf{u}\right|^2 \le \|\mathbf{h}\|^2 \|\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{h}\|^2 \tag{7}$$

即当

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{h}^*}{\|\mathbf{h}\|} \tag{8}$$

时，接收端 SNR 达到最大值 $C\left(\|\mathbf{h}\|^2 P/N_0\right)$。对应的信道容量为 $C\left(\|\mathbf{h}\|^2 P/N_0\right)$

Remark 1：根据上面分析，CSIR 情况下的 SIMO 信道和 CSIT 情况下的 MISO 信道容量具有相同的信道容量，并且分别通过接收端的 MRC 和发送端的 MRT 实现。CSIR+MRC 与 CSIT+MRT 显然是一组对偶实现方式。实际上，点对点的收发端和多用户的上下行链路都存在对偶关系。

3）频率选择性衰落信道

考虑采用 OFDM 调制的频率选择性衰落信道，其频域输入输出信号模型为

$$y_n = h_n x_n + w_n,\ n = 1, \ldots, N_c \tag{9}$$

其中 N_c 表示 OFDM 子载波数，x_n 和 h_n 分别是第 n 个子载波上发送信号和频域信道且有 $E\left[\left|x_n\right|^2\right] \le P_n$，$w_n \sim \mathcal{CN}\left(0, N_0\right)$ 表示频域加性高斯噪声。显然，该结构的可达速率为

$$R\left(P_1, \ldots, P_{N_c}\right) = \sum_{n=1}^{N_c} \ln\left(1 + \frac{\left|h_n\right|^2 P_n}{N_0}\right) \tag{10}$$

信道容量为

$$\begin{aligned} C = &\max_{\{P_n\}} R\left(P_1, \ldots, P_{N_c}\right) \\ s.t.\ \ &P_1 + \ldots + P_{N_c} = N_c P \\ &P_n \ge 0,\ \ n = 1, \ldots, N_c \end{aligned} \tag{11}$$

其中 $N_c P$ 为所有子载波信道的和功率约束。

显然，优化问题（11）是一个凸优化问题，其对应的拉格朗日函数为

$$\mathcal{L}\left(\boldsymbol{\lambda}, u, \mathbf{P}\right) = -\sum_{n=1}^{N_c} \ln\left(1 + \frac{\left|h_n\right|^2 P_n}{N_0}\right) - \sum_{n=1}^{N_c} \lambda_n P_n + u\left(P_1 + \ldots + P_{N_c} - N_c P\right) \tag{12}$$

KKT 条件为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_n} = -\dfrac{|h_n|^2 / N_0}{1+P_n |h_n|^2 / N_0} - \lambda_n + u = 0 \\ \lambda_n P_n = 0,\ \ \lambda_n \ge 0,\ n = 1,\ldots,N_c \end{cases} \tag{13}$$

求解 KKT 条件得到最佳的功率分配为

$$P_n^* = \left(\frac{1}{u} - \frac{N_0}{|h_n|^2} \right)^+ \tag{14}$$

其中 $(x)^+ = \max(x,0)$，u 满足约束 $\sum_{n=1}^{N_c} P_n^* = N_c P$。解（14）也称为功率注水。将上述最佳功率分配代入（11）的目标函数即得频选信道的信道容量

$$C = \sum_{n=1}^{N_c} \ln\left(1 + \frac{|h_n|^2 P_n^*}{N_0} \right) \tag{15}$$

作业 1：利用 packing sphere 技术（参考 David Tse 书 5.1.2 节）证明公式（10）。详细提示见参考 David Tse 书习题 5.12。

2、慢/块衰落信道

1）中断概率与中断容量

接下来讨论当信道处于慢衰落时的信道容量。慢衰落信道模型为

$$y_t = h x_t + w_t,\ t = 1,\ldots,T \tag{16}$$

在慢衰落信道中，在服务时间内信道不发生变化，因此当信道质量差时不能通过分集等方法改善系统性能，因此不能按照 QoS 要求传输数据，此时称为传输发生中断。

中断概率定义为当前的目标速率 R 大于当前固定高斯信道容量的概率，即

$$P_{out}(R) = \Pr\left(\log_2\left(1 + |h|^2 SNR_t\right) < R \right) \tag{17}$$

其中发送端 SNR 定义为 $SNR_t = P/N_0$。在瑞利衰落信道假设 $h \sim \mathcal{CN}(0,1)$ 下，有 $u \triangleq |h|^2 \sim \exp(1)$，此时

$$P_{out}(R) = \Pr\left(u < \frac{2^R - 1}{SNR_t} \right) = \int_0^{\frac{2^R-1}{SNR_t}} e^{-u} du = 1 - \exp\left(-\frac{2^R - 1}{SNR_t} \right) \tag{18}$$

在高 SNR 时，有

$$P_{out}(R) \approx \frac{2^R - 1}{SNR_t} \tag{19}$$

根据中断概率可以定义中断容量。ε 中断容量定义为中断概率不大于 ε 时的最大可传输速率，即

$$C_\varepsilon = \log\left(1+F^{-1}(1-\varepsilon)SNR_t\right) \tag{19}$$

其中 $F(x) \triangleq \Pr\left(|h|^2 > x\right)$。该中断容量表达式可由下式推导

$$\begin{aligned}
&\varepsilon = P_{out}(R) = \Pr\left(|h|^2 < \frac{2^R-1}{SNR_t}\right) = 1-\Pr\left(|h|^2 > \frac{2^R-1}{SNR_t}\right) = 1-F\left(\frac{2^R-1}{SNR_t}\right) \\
&\Leftrightarrow \frac{2^R-1}{SNR_t} = F^{-1}(1-\varepsilon) \\
&\Leftrightarrow R = \log\left(1+F^{-1}(1-\varepsilon)SNR_t\right)
\end{aligned} \tag{20}$$

在高 SNR 时，有

$$\begin{aligned}
C_\varepsilon &\approx \log F^{-1}(1-\varepsilon) + \log\left(SNR_t\right) \\
&\approx \log F^{-1}(1-\varepsilon) + C_{awgn,h}
\end{aligned} \tag{21}$$

其中 $C_{awgn,h} \approx \log\left(SNR_t\right)$ 为 AWGN 信道在高 SNR 的容量近似表达式。在低 SNR 时，有

$$\begin{aligned}
C_\varepsilon &\approx F^{-1}(1-\varepsilon)SNR_t \log_2 e \\
&\approx F^{-1}(1-\varepsilon)C_{awgn,l}
\end{aligned} \tag{22}$$

其中 $C_{awgn,l} \approx SNR_t \log_2 e$ 为 AWGN 信道在低 SNR 的容量近似表达式。

进一步，在瑞利衰落信道假设下 $u \triangleq |h|^2 \sim \exp(1)$，因此

$$F(x) \triangleq \Pr\left(|h|^2 > x\right) = \int_x^\infty e^{-u}du = \exp(-x) \approx 1-x \text{ for } 0<x \ll 1 \tag{23}$$

即当中断概率较小时有 $F^{-1}(1-\varepsilon) \approx \varepsilon$。代入公式（22）可知低 SNR 时慢衰落信道中断容量仅为高斯信道是容量的 ε 部分。代入（21）知 $\log F^{-1}(1-\varepsilon) \approx \log\varepsilon < 0$，因此高 SNR 时，慢衰落信道中断容量比高斯信道容量小 $-\log\varepsilon$。

为了降低中断概率，可以在空间、时间和频率等资源维度上采用分集技术。

2）接收空间分集

根据式（4），配置 N_r 根接收天线的 SIMO 信道的中断概率可表示为

$$\begin{aligned}
P_{out}^{rx}(R) &= \Pr\left(\log_2\left(1+\|\mathbf{h}\|^2 SNR_t\right) < R\right) \\
&= \Pr\left(\|\mathbf{h}\|^2 < \frac{2^R-1}{SNR_t}\right)
\end{aligned} \tag{24}$$

在瑞利衰落假设下，$u \triangleq \|\mathbf{h}\|^2 \sim \chi^2(0, 2N_r)$，其概率密度函数 PDF 为

$$f(u) = \frac{1}{(N_r - 1)!} u^{L-1} e^{-u}, \ \ u \geq \tag{25}$$

当 u 很小时 $e^{-u} \approx 1$，因此上述 PDF 近似为

$$f(u) \approx \frac{1}{(N_r - 1)!} u^{L-1}, \ \ u \geq \tag{26}$$

将（26）代入（24），在高 SNR 时有

$$P_{out}^{rx}(R) = \Pr\left(\|\mathbf{h}\|^2 < \frac{2^R - 1}{SNR_t}\right) \approx \frac{\left(2^R - 1\right)^{N_r}}{N_r!SNR_t^{N_r}} \tag{27}$$

显然，相比（19），SIMO 获得接收分集增益 N_r。

3）发送空间分集

在 CSIT 情况下，N_t 根发送天线的 MISO 固定高斯信道容量为 $C\left(\|\mathbf{h}\|^2 P/N_0\right)$，中断概率为

$$P_{out}^{tx,csit}(R) = \Pr\left(\log\left(1 + \|\mathbf{h}\|^2 SNR_t\right) < R\right) \tag{28}$$

上式与（24）相同，因此可获得分集度为 N_t。

当仅在接收端已知 CSI，即 CSIR 时，首先考察 N_t=2 MISO Alamouti 结构。根据 Lecture 2 分析结果，Alamouti 结构中断概率为

$$P_{out}^{ala}(R) = \Pr\left(\log\left(1 + \|\mathbf{h}\|^2 \frac{SNR_t}{2}\right) < R\right) \tag{28}$$

简单推导能够发现，Alamouti 结构能获得分集度 2，但相比 CSIT 情况（28），有 3dB 的功率损失。Alamouti 结构在 2 发 1 收的 MISO 中是容量可达结构。更广义的 Nt>2 时的信道容量与 Alamouti 结构可达速率有相似的表达式，其中断概率为

$$\begin{aligned} P_{out}^{opt}(R) &= \Pr\left(\log\left(1 + \|\mathbf{h}\|^2 \frac{SNR_t}{N_t}\right) < R\right) \\ &= \Pr\left(\|\mathbf{h}\|^2 < \frac{N_t\left(2^R - 1\right)}{SNR_t}\right) \end{aligned} \tag{29}$$

进一步考虑重复结构，其中断概率可以表示为

$$
\begin{aligned}
P_{out}^{rep}(R) &= \Pr\left(\frac{1}{N_t}\log\left(1+\|\mathbf{h}\|^2 SNR_t\right) < R\right) \\
&== \Pr\left(\|\mathbf{h}\|^2 < \frac{2^{N_t R}-1}{SNR_t}\right)
\end{aligned} \tag{30}
$$

比较（29）和（30），为了达到相同的中断概率，要求

$$
\frac{N_t\left(2^R-1\right)}{SNR_t^{opt}} = \frac{2^{N_t R}-1}{SNR_t^{rep}} \tag{31}
$$

这里，为了区分将正交和重复结构的发送端 SNR 分别记为SNR_t^{opt}和SNR_t^{rep}。在低码率$R \to 0$时注意到$2^R = \left(e^{\ln 2}\right)^R = e^{R\ln 2} \approx 1 + R\ln 2$，有$2^{N_t R} - 1 \approx N_t R \ln 2$ 和$2^R - 1 \approx R\ln 2$由（31）得

$$
\frac{SNR_t^{rep}}{SNR_t^{opt}} = \frac{2^{N_t R}-1}{N_t\left(2^R-1\right)} \approx \frac{N_t R\ln 2}{N_t R\ln 2} = 1 \tag{32}
$$

因此在低码率区正交结构和重复结构具有相似的性能。在高码率区显然有$SNR_t^{rep} > SNR_t^{opt}$，即在相同的中断概率情况下重复结构需要更多的发送能量。

作业 2：证明公式（29）。

4）时间和频率分集

上述考虑慢衰落信道，数据服务时间仅经历一个固定的信道衰落。这里考虑块衰落信道，即信息在 L 个相干间隔进行传输（L 为有限值），每个相干间隔包括 T 个信道时隙。此时，输入输出信号模型为

$$
y_l(t) = h_l x_l(t) + w_l(t),\ l = 1,\dots,L,\ t = 1,\dots,T \tag{33}
$$

其中$x_l(t)$表示第 l 个相干间隔的第 t 个时隙的发送信号，$y_l(t)$和$w_l(t)$定义类似，h_l表示第 l 个相干间隔上的信道。

上述信道模型可等价为 T 个 L-并行信道，每个并行信道均为慢衰落。每个并行信道的最大可达速率为

$$
\sum_{l=1}^{L}\log_2\left(1+|h_l|^2 SNR_{t,l}\right) \tag{34}
$$

其中$SNR_{t,l} = P_l/N_0$，P_l为第 l 个子信道的发送功率，且满足总功率约束$P_1 + \dots + P_L \le LP$。

在 CSIT 情况下，类似 OFDM 在频域进行功率注水，可以在时间上进行功率注水最大

化可达速率（34）。此时 $SNR_{t,l}=P_l^*/N_0$，其中 P_l^* 表示由功率注水确定的第 l 个子信道的发送功率。在仅有 CISR 的情况下，一般采用等功率分配即 $P_l=P,\ \forall l$。此时 $SNR_{t,l}=P/N_0$。两种情况下，系统的中断概率均可表示为

$$P_{out}\left(R\right)=\Pr\left(\sum_{l=1}^{L}\log_2\left(1+\left|h_l\right|^2 SNR_{t,l}\right)<LR\right) \tag{35}$$

在 CSIT 情况下，第 l 个子信道分配速率 $R_l=\log_2\left(1+\left|h_l\right|^2 P_l^*/N_0\right)$，采用编码技术能够保证按照 R_l 事先可靠传输。因此，并行信道能够实现 $\sum_{l=1}^{L}R_l=LR$ 的可靠传输。即仅当并行信道速率大于 LR 时才发送中断，获得了公式（35）的中断性能。

在 CSIR 情况下，由于未知信道信息，每个子信道的信息速率为 $R=\log_2\left(1+\left|h_l\right|^2 P/N_0\right)$，当 $\left|h_l\right|^2$ 较小不能支持速率 R 时即发送中断，对应的中断概率为

$$\Pr\left(\log_2\left(1+\left|h_l\right|^2 SNR_{t,l}\right)<R\right) \tag{36}$$

整个系统的中断概率（只要有一个子信道中断系统即中断）为

$$\Pr\left(\min_{l=1,\dots,L}\log_2\left(1+\left|h_l\right|^2 SNR_{t,l}\right)<R\right) \tag{37}$$

显然上式给出的中断概率大于（35），仅整个系统不能实现速率 LR 的可靠传输。为了获得式（35）的中断性能即实现速率 LR 的可靠传输，需要将 L 个子信道看作一个整体间进行联合编码以获得整个系统速率（34）。直观上，各个子信道间通过编码实现协作（充分利用 L 个独立衰落子信道的分集度），信道好的帮助信道差的子信道，最终实现整体速率 LR 的可靠传输。

将 L 看作 OFDM 子载波数，T 看作 OFDM 符号数。此时，信道在 T 个 OFDM 符号时间保持不变，但子载波信道之间独立衰落。上述时间分集即为频率分集。

3、快衰落信道

快衰落信道输入输出信号模型为

$$y_t=h_t x_t+w_t,\ t=1,\dots,T \tag{38}$$

对该信道容量的分析分为 CSIR 和 CSIT 两种情况分别进行讨论。

1）CSIR 情况

在 CSIR 情况下，每符号时刻分配相同的发送功率 P，发送端 SNR 为 $SNR_t=P/N_0$。

在快衰落信道假设下，不同符号时刻对应的信道相互独立并且业务持续时间充分长，因此可对信道求平均，定义遍历信道容量为

$$C = E_h\left[\log_2\left(1+\left|h_l\right|^2 SNR_t\right)\right] \tag{39}$$

利用对数函数的上凸性（concave），根据 Jensen 不等式

$$\begin{aligned} C &= E_h\left[\log_2\left(1+\left|h_l\right|^2 SNR_t\right)\right] \\ &\le \log_2\left(1+E_h\left[\left|h_l\right|^2\right]SNR_t\right) \\ &= \log_2\left(1+SNR_t\right) = C_{awgn} \end{aligned} \tag{40}$$

其中假设 $E_h\left[\left|h_l\right|^2\right]=1$。因此在 CSIR 情况下，快衰落信道容量小于高斯信道容量。

Remark 2：事实上快衰落信道等价于 $L\to\infty$ 的块衰落信道。此时在块衰落信道的中断概率表达式中

$$P_{out}\left(R\right) = \Pr\left(\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\log_2\left(1+\left|h_l\right|^2 SNR_{t,l}\right) < R\right) \tag{41}$$

利用大数定律有

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\log_2\left(1+\left|h_l\right|^2 SNR_{t,l}\right) = E_h\left[\log_2\left(1+\left|h_l\right|^2 SNR_t\right)\right] \tag{42}$$

因此式(41)中第一项变为确定值 C。对于确定值 C，如果目标速率 R 大于 C 有 $\Pr\left(C<R\right)=1$，反之有 $\Pr\left(C<R\right)=0$。因此在快衰落信道中仅讨论遍历信道容量。

2）CSIT 情况

在 CSIT 情况下，发送端能够根据信道质量确定每符号时刻的发送功率，即在时间上进行功率注水。此时遍历信道容量为

$$C = \lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\log_2\left(1+\frac{P_l^*\left|h_l\right|^2}{N_0}\right) = E_h\left[\log_2\left(1+\frac{P^*\left|h\right|^2}{N_0}\right)\right] \tag{43}$$

其中

$$P^* = \left(\frac{1}{u}-\frac{N_0}{\left|h\right|^2}\right)^+ \tag{44}$$

考虑高 SNR 情况，此时 $N_0\to 0$，从（44）有 $P^*\approx 1/u$，即此时的功率注水策略简化为每个符号等功率分配。进一步，此时的信道容量即为 CSIR 情况下的信道容量。

考虑极低 SNR 情况，此时 $N_0 \to \infty$。假设 N 个信道 $l_1,\ldots,l_N$ 分配功率，且满足 $\left|h_{l_1}\right| > \ldots > \left|h_{l_N}\right|$。考虑前两个信道分配功率

$$P_{l_1}^* = \frac{1}{u} - \frac{N_0}{\left|h_{l_1}\right|^2},\ P_{l_2}^* = \frac{1}{u} - \frac{N_0}{\left|h_{l_2}\right|^2} \tag{45}$$

其功率差为

$$P_{l_1}^* - P_{l_2}^* = N_0 \left(\frac{1}{\left|h_{l_2}\right|^2} - \frac{1}{\left|h_{l_1}\right|^2} \right) \to \infty, \text{ since } N_0 \to \infty \tag{46}$$

因此 N=1。即在极低 SNR 时，功率注水等价于将所有功率分配给信道质量最好的符号时隙。此时的传输速率可表达为

$$\begin{aligned} C &\approx \Pr\left(\left|h\right|^2 = G_{\max}\right) \log_2\left(1 + G_{\max} \frac{P_{tot}}{N_0}\right) \\ &= \Pr\left(\left|h\right|^2 = G_{\max}\right) \log_2\left(1 + G_{\max} \frac{P}{\Pr\left(\left|h\right|^2 = G_{\max}\right) N_0}\right) \\ &\approx \Pr\left(\left|h\right|^2 = G_{\max}\right) G_{\max} \frac{P}{\Pr\left(\left|h\right|^2 = G_{\max}\right) N_0} \log_2 e \\ &= G_{\max} SNR_t \log_2 e = G_{\max} C_{awgn} \end{aligned} \tag{47}$$

上式中 $G_{\max}$ 对应最好的信道质量，并且利用了总发送功率 P_{tot} 与平均功率 P 的关系式 $P = P_{tot} \Pr\left(\left|h\right|^2 = G_{\max}\right)$，$C_{awgn} = SNR_t \log_2 e$ 为低 SNR 时 AWGN 信道容量。注意到一般有 $G_{\max} > 1$，**因此在 CSIT 和极低 SNR 情况下，衰落信道相比高斯信道具有更大的容量**。