柯西–黎曼方程的极坐标形式

我们知道，判断函数 $f(z)$在点$z = x + iy$处的可导性的柯西-黎曼方程为：

$$U_x = V_y, \quad U_y = -V_x \tag{1}$$

这里 U 和 V 分别是复变函数 f 的实部函数和虚部函数。

复数$z = x + iy$极坐标形式下有：

$$x = rcos\theta, \quad y = rsin\theta \tag{2}$$

这里，x和 y 都是r和θ的函数。

因此，U 和 V 分别对r和θ求偏导，根据二元函数求导的链式法则，可得：

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}, \qquad \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} \tag{3}$$

即：

$$U_r = U_x cos\theta + U_y sin\theta, \qquad U_\theta = -U_x rsin\theta + U_y rcos\theta \tag{4}$$

类似的，有

$$V_r = V_x cos\theta + V_y sin\theta, \qquad V_\theta = -V_x rsin\theta + V_y rcos\theta \tag{5}$$

将（1）两式代入(5)式，可得

$$V_r = -U_y cos\theta + U_x sin\theta, \qquad V_\theta = U_y rsin\theta + U_x rcos\theta \tag{6}$$

比较（4）（6）两式，可得：

$$\boldsymbol{rU_r = V_\theta}, \qquad \boldsymbol{rV_r = -U_\theta} \tag{7}$$

(7)式即为柯西-黎曼方程的极坐标形式。

并且，在极坐标下，关于导数有如下定理：

定理：设函数

$$f(z) = U(r,\theta) + iV(r,\theta)$$

在非零点$z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$的某个邻域内处处有定义，并且

（1） U 和 V 关于r和θ的一阶偏导数在该邻域内处处存在；

（2） 这些偏导数在点(r_0, θ_0)连续且满足条件 $\boldsymbol{rU_r = V_\theta}$，$\boldsymbol{rV_r = -U_\theta}$

那么，$\boldsymbol{f'(z_0)}$存在，其值为

$$\boldsymbol{f'(z_0) = e^{-i\theta}(U_r + iV_r)} \tag{8}$$

其中(8)式右边在(r_0, θ_0)取值。