# 复数域和实数域

在学习复变函数之前，我们接触到的数域最大到实数域，碰到的变量、函数、极限、积分、导数等概念和运算都在实数域范围内。**域是数学上的一个概念，简单地说就是有一个数的集合，这个集合对加、减、乘、除（分母不为 0）四则运算封闭，即集合中的任意两个元素做四则运算，结果得到的元素仍然在这个集合里。**根据这一规则可知，全体自然数、全体整数不构成域，全体有理数构成有理数域，全体实数构成实数域。在学习了复变函数论以后知道，全体复数也构成复数域。那么，实数域和复数域是什么关系呢？

也许可以认为，复数域是比实数域更大的数域，复数域包含了实数域。**这样一种观点不能算是正确的。**的确，在复平面内，横轴表示复数的实部，这条轴看起来就表示了全体实数。但是当复数 $z$ 在这上面取值的时候，是不是表示 $z$ 就是一个实数呢？

不是的。不管 $z$ 在复平面内哪里取值，它都是一个复数，即 $z=x+iy$ 是由实部和虚部的二元结构表示的数。只是当 $z$ 在实轴上取值时，其虚部 $y\equiv 0$，因此对复数 $z$ 进行运算时相当于只对其实部 $x$ 做运算，而其虚部将不会对运算结果起任何作用，这就使得此时对复数的运算完全相同于对实数的运算。虽然如此，请记住：此时只是复数 $z$ 的虚部等于 0，并不等于说此时复数 $z$ 变成了实数 $x$，更不能说复数 $z$ 没有虚部。**而这一结论能够成立的一个前提条件是：实数对四则运算是封闭的，不会在运算过程中产生复数。**这种关系还可以这样理解：实数轴上的全部复数可以和实数域中的全体实数之间建立一个一一映射关系，$x+i0\to x$，此时对复数的四则运算，包括求积分、求导数等运算，完全相同于对实数的运算。

在整个复平面内，只有实轴对四则运算是封闭的，虚轴对乘法和除法不封闭，不能构成一个数域。而其它任意一条过原点的直线上的点对应的复数也对四则运算不封闭，不能形成一个数域，因此它们看起来都是一条直线，但是却不能和实轴一样，跟全体实数之间建立一个一一映射关系，让复数运算等同于实数运算。

留数定理在实变函数积分中的应用中，就是利用了这种关系。在实轴上的积分，等价于在实轴上取值的复数的积分，从而把运算转化到复数域中。假如实数域对积分（实际上就是乘法和加法）不封闭，那么就无法实现这种转化了。