留数的由来

若函数 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的邻域：$0<|z-z_0|<R$ 内解析，则 $f(z)$ 可以展开成洛朗级数：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=-\infty}^{-2}c_n(z-z_0)^n+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n \qquad (1)$$

围绕 z_0 的一条简单闭曲线 $C:|z-z_0|<\delta$，其中 $0<\delta<R$，则（1）式两边同时沿 C 积分，得到：

$$\oint_C f(z)dz=\sum_{n=-\infty}^{-2}\oint_C c_n(z-z_0)^n dz+\oint_C c_{-1}(z-z_0)^{-1}dz+\sum_{n=0}^{+\infty}\oint_C c_n(z-z_0)^n dz \qquad (2)$$

下面来看（2）右端的积分 $\oint_C c_n(z-z_0)^n dz$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ ：

当 $n=-1$ 时，$\oint_C c_{-1}(z-z_0)^{-1}dz=c_{-1}\oint_C \frac{1}{z-z_0}dz=c_{-1}\cdot 2\pi i$（由柯西积分公式可得）；

当 $n\geq 0$ 时，$\oint_C c_n(z-z_0)^n dz$ 中的被积函数 $c_n(z-z_0)^n$ 是幂函数，在 z_0 点解析，即在 C 及其内部解析，因此有 $\oint_C c_n(z-z_0)^n dz=0$（由柯西古萨基本定理可得）；

当 $n\leq -2$ 时，$\oint_C c_{-k}(z-z_0)^{-k}dz=c_{-k}\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^k}dz=0$（由高阶导数公式可得，或者令 $z=z_0+\delta e^{i\theta}(0\leq\theta\leq 2\pi)$，代入积分式求解可得，见课本 73 页例 2.）

因此，（2）式可推出：

$$\oint_C f(z)dz=\oint_C c_{-1}(z-z_0)^{-1}dz \qquad (3)$$

由于在 $f(z)$ 沿 C 积分的过程中，（1）式中只有 c_{-1} 是有效的，或者说只有 c_{-1} “保留”了下来，因此规定 c_{-1} 是 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的留数，记作

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=c_{-1} \qquad (4)$$