一级极点的留数与柯西积分公式

若函数 $f(z)$ 在 z_0 点不解析，并且在 z_0 点的去心邻域内展开的洛朗级数中，只有 $c_{-1}(z-z_0)^{-1}$ 一项负幂项，而其它 $c_{-n}=0,(n=2,3,4,\cdots)$ 即有

$$f(z)=c_{-1}(z-z_0)^{-1}+c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots$$

则称 z_0 为 $f(z)$ 的一级极点。

由于

$$\begin{aligned}f(z)&=c_{-1}(z-z_0)^{-1}+c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots\\&=(z-z_0)^{-1}\cdot\left(c_{-1}+c_0(z-z_0)+c_1(z-z_0)^2+c_2(z-z_0)^3+\cdots\right)\\&=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)}\end{aligned}\qquad（1）$$

其中，

$$\varphi(z)=c_{-1}+c_0(z-z_0)+c_1(z-z_0)^2+c_2(z-z_0)^3+\cdots\qquad（2）$$

z_0 点的邻域内是解析函数，并且 $\varphi(z_0)=c_{-1}\neq 0$ 。

由一级极点的留数计算规则，

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)f(z)\right)=\lim_{z\to z_0}\varphi(z)=\varphi(z_0)\qquad（3）$$

因此，若闭曲线 C 仅含有 z_0 一个奇点，则由留数定理知道，函数 $f(z)$ 在 C 上的积分为

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\cdot\mathrm{Res}[f(z),z_0]=2\pi i\cdot\varphi(z_0)\qquad（4）$$

若考虑柯西积分公式，则

$$\varphi(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)}dz\Rightarrow\oint_C\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)}dz=2\pi i\cdot\varphi(z_0)\qquad（5）$$

即 $\oint_C f(z)dz=2\pi i\cdot\varphi(z_0)$。

上面两种思路得到相同的结果。

并且，可以看出函数 $\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)}$ （其中 $\varphi(z)$ 是解析函数） 在 z_0 点的留数

$$\mathrm{Res}[\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)},z_0]=\varphi(z_0)\qquad（6）$$