

## 欧拉公式

复数的指数表示式  $z = re^{i\theta}$ ，三角表示式  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 。这两种表示是由以下方程联系在一起

$$e^{i\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta)$$

这是著名的欧拉公式。

在学习了泰勒级数以后，我们知道

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots \\ &= \left(1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots\right) + \left(i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots\right) \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right) \\ &= \cos \theta + i \sin \theta \end{aligned}$$

这就证明了欧拉公式。

当  $\theta = \pi$  时，得到

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

由于此公式将数学中的五朵金花  $e, \pi, 1, i, 0$  完美地结合在一起，因此被称为“上帝创造的公式”。