



第二篇 集合论

第3章 集合与关系

第13课时



3.1 集合及其运算

第14课时



3.2 二元关系

第15课时



3.3 集合上的二元关系及其特性

第16课时



3.4 关系的闭包运算

第17—18课时



3.5 等价关系

第19—20课时



3.6 序关系



§3.1.1 集合的定义

集合:

集合是一个不能精确定义的基本概念，通常将具有共同性质的事物汇集在一起形成的集体称为集合。集合用大写字母 A , B , ... 表示。

元素:

组成集合的单个事物称为该集合的元素，或称为成员。元素用小写字母 a , b , c , ... 表示。

集合的元素可以是一个集合。例如: $S = \{a, \{1, 2\}, p, \{q\}\}$ 。

§3.1.1 集合的定义



集合与元素的关系

属于关系 $\in$: 若元素 a 在集合 A 中, 记为 $a \in A$,
称“ a 属于 A ”或“ a 是 A 成员”。

不属于关系 $\notin$: 若元素 a 不在集合 A 中, 记为
 $a \notin A$, 称“ a 不属于 A ”或“ a 不是 A 的成员”。

一个元素要么属于给定的集合, 要么不属于该集合,
两者必居其一。



§3.1.1 集合的定义

有限集合

含有有限个元素的集合称为有限集合。

无限集合

不是有限集合的集合称为无限集合。

集合的基数

度量集合大小的数称为集合的基数或势。设 A 是有限集合， A 的基数等于其包含的元素的个数，记为 $|A|$ 。

§3.1.2 集合的表示方法



通常可以用以下几种方法来表示一个集合。

(1) **列举法**。将集合中的元素一一列举出来。例如： $A=\{a, b, c\}$ ， $B=\{0, 1, 2, 3, 4\}$ ， $D=\{\text{老虎}, \text{灯泡}, \text{书桌}\}$ 。

(2) **描述法**。利用自然语言或谓词描述集合中元素的共同特征。例如： $A=\{x \mid x \text{ 是中国的省份}\}$ ， $B=\{y \mid y=a \text{ 或 } y=b\}$ 。

可以用一个谓词 $P(x)$ 来描述集合中元素的共同特征。例如： $S=\{x \mid P(x)\}$ ，如果 $P(a)$ 为真，那么 $a \in S$ ，否则 $a \notin S$ 。

(3) **归纳定义法**。

§3.1.3 集合间的关系



子集

设 A, B 是任意的两个集合, 若集合 A 的每个元素都是集合 B 的元素, 则称 A 为 B 的子集或称“ B 包含 A ”, 记为 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$ 。

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

真子集

如果集合 A 的每一个元素都属于 B , 但集合 B 中至少有一个元素不属于 A , 则称 A 为 B 的真子集, 记为 $A \subset B$ 。

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (\exists y)(y \in B \wedge y \notin A)$$

$$\Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$$

§3.1.3 集合间的关系



【集合相等的外延性公理】 两个集合A和B相等，即 $A=B$ ，当且仅当它们有相同的成员。

$$A=B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (\forall x)(x \in B \rightarrow x \in A)$$

$$\Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

【定理】 两个集合A和B相等，即 $A=B$ ，当且仅当 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 。

§3.1.3 集合间的关系



【推论】 对于任意集合 A ，都有 $A \subseteq A$ 。

【定理】 设 A 、 B 、 C 是集合，若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$ ，则 $A \subseteq C$ 。



§3.1.4 特殊的集合

全集：在一定范围内所有事物构成的集合，称为该领域的全集，记为 U 。

$$U = \{x \mid P(x) \vee \neg P(x)\}$$

其中 $P(x)$ 是任意的谓词。

空集：不含任何元素的集合，记为 $\emptyset$ 。

$$\emptyset = \{x \mid P(x) \wedge \neg P(x)\}$$

其中 $P(x)$ 是任意的谓词。

空集是唯一的。空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集。



§3.1.4 特殊的集合

幂集： 给定集合 A ，由 A 的所有子集为元素构成的集合，称为集合 A 的幂集，记为 $\rho(A)$ 。

$$\text{设 } |A|=n, \quad |\rho(A)| = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n。$$



§3.1.4 特殊的集合

【例题】 设 $A=\emptyset$, $B=\{1, 2, 3\}$ 。求 A 和 B 的幂集。

解答: $\rho(A)=\{\emptyset\}$ 。

$\rho(B)=\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ 。



§3.1.5 集合的运算及性质

(1) 集合的交 ($\cap$)

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

(2) 集合的并 ($\cup$)

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

(3) 集合的差 ($-$)

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

(4) 集合的补 ($\bar{}$)

$$\bar{A} = U - A = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$$

(5) 集合的环和 ($\oplus$)

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$= \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$$

(6) 集合的环积 ($\otimes$)

$$A \otimes B = \overline{A \oplus B}$$

§3.1.5 集合的运算及性质



序号	性质	描述
(1)	交换律	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
(2)	结合律	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$
(3)	分配律	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(4)	同一律	$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$
(5)	互补律	$A \cup \bar{A} = U$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$

§3.1.5 集合的运算及性质



(6)	对合律	$\overline{\overline{A}} = A$
(7)	等幂律	$A \cup A = A \quad A \cap A = A$
(8)	零一律	$A \cup U = U \quad A \cap \emptyset = \emptyset$
(9)	吸收律	$A \cup (A \cap B) = A \quad A \cap (A \cup B) = A$
(10)	德·摩根律	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

§3.1.5 集合的运算及性质



『定理』设 A 和 B 是全集 U 的任意子集, 若 $A \subseteq B$, 则 $\bar{B} \subseteq \bar{A}$ 。

证明:

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B) \\ &\Leftrightarrow (\forall x)(\neg(x \in B) \rightarrow \neg(x \in A)) \\ &\Leftrightarrow (\forall x)(x \notin B \rightarrow x \notin A) \\ &\Leftrightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A} \end{aligned}$$



§3.1.5 集合的运算及性质

『定理』 设 A 和 B 是全集 U 的任意子集，若 $A \subseteq B$ ，则

$$(B-A) \cup A = B$$

证明：

$$\begin{aligned}(B-A) \cup A &= (B \cap \bar{A}) \cup A \\ &= (B \cup A) \cap (\bar{A} \cup A) \\ &= B \cup A\end{aligned}$$

因为 $A \subseteq B$ ，就有 $(B \cup A) = B$ ，因此 $(B-A) \cup A = B$ 。



» 内容总结和延伸

集合的定义

具有共同性质的事物构成的集体。

集合的表示

列举法、描述法、归纳定义法。

集合间的关系

子集、真子集，相等关系

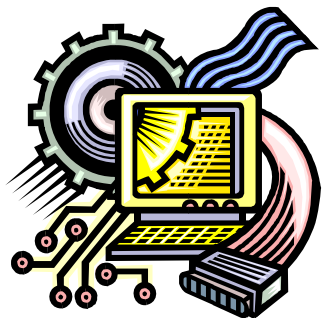
特殊的集合

全集、空集、幂集

集合的运算及性质



» 结束语



本节内容结束，谢谢大家！

作业（左孝凌书）： $P_{86}(3,4,5,6,7)$