第三章 布朗运动（维纳过程）

1. 1827年植物学家布朗观察到现象

2. 1905 爱因斯坦由物理定律导出其数学描述

3. 1918后维纳提出其简明的数学公式——维纳过程

布朗运动内容

- 布朗运动定义
- 布朗运动的一些性质
- 与布朗运动的相关的随机过程

布朗运动定义

称实随机过程$\{W_t,t\geqslant 0\}$是参数为σ^2的布朗运动,如果

(1) $W_0=0$

(2) $\{W_t,t\geq 0\}$是平稳的独立增量过程.

(3) $\forall 0\leq s<t, W_t-W_s\sim N(0,\sigma^2(t-s))$

$\sigma^2=1$时，称为标准布朗运动

数字特征

设 $\{W_t, t \geqslant 0\}$是标准布朗运动.则

$$m_W(t) = 0, \quad D_W(t) = t, \quad t \geq 0,$$

$$R_W(s,t) = C_W(s,t) = \min(s,t), s,t, \geq 0$$

证明　由定义易知有

$$m_W(t) = 0, D_W(t) = t, t \geq 0$$

对$s \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, 不妨设 $s \leqslant t$, 则

$$
\begin{aligned}
R_W(s,t) &= \mathrm{E}[W_s W_t] \\
&= \mathrm{E}[(W_s - W_0)(W_t - W_s + W_s)] \\
&= \mathrm{E}[(W_s - W_0)(W_t - W_s)] + \mathrm{E}[W_s]^2 \\
&= 0 + \mathrm{E}[W_s]^2 \\
&= D[W_s] + (\mathrm{E}[W_s])^2 \\
&= s \\
&= \min(s,t)
\end{aligned}
$$

独立性

$$
C_W(s,t) = R_W(s,t) - m_W(s)m_W(\mathrm{t}) = \min(s,t)
$$

例1 试计算标准布朗运动的一、二维分布函数

一维分布函数 $F(t_1;x)=P(W_{t_1}\leqslant x)$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{x^2}{2t_1}}dx$$

（其中注意到有 $W_{t_1} \sim N(0,t_1)$）

例1 试计算标准布朗运动的一、二维分布函数

二维分布函数为

$$F(t_1,t_2;x_1,x_2)=P(W_{t_1}\leqslant x_1,W_{t_2}\leqslant x_2)=P(W_{t_1}\leqslant x_1,W_{t_1}+(W_{t_2}-W_{t_1})\leqslant x_2)$$

令 $\xi=W_{t_1},\quad \eta=W_{t_2}-W_{t_1}$，则 ξ 服从 $N(0,t_1)$ 分布，η 服从 $N(0,t_2-t_1)$ 分布

所以 $F(t_1,t_2;x_1,x_2)=P(\xi\leqslant x_1,\xi+\eta\leqslant x_2)$

$$=\int_{-\infty}^{x_1}P(\eta\leqslant x_2\text{-}y)P(\xi\in dy)$$

$$=\int_{-\infty}^{x_1}P(\eta\leqslant x_2\text{-}y)\varphi_{t_1}(y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2-y}\varphi_{t_2-t_1}(z)dz\varphi_{t_1}(y)dy$$

其中 $\varphi_{t_1}(y)$ 为 $N(0,t_1)$ 分布的密度函数，

$\varphi_{t_2-t_1}(z)$ 为 $N(0,t_2\text{-}t_1)$ 分布的密度函数。

例1 验证布朗运动是正态过程

证明 设 **W={W_t,t≥0}**是参数为 σ **²**的布朗运动，则由定义，对任意的**n**≥1, 及任意的$0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n$

$$W_{t1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \cdots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$ 相互独立且

$$W_{t_k} - W_{t_{k-1}} \sim \mathrm{N}(0,\ \sigma^2(t_k - t_{k-1}))$$

所以

（$W_{t1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \cdots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$）是**n**维正态变量.

又由于

$$(W_{t1},W_{t_2},\cdots,W_{t_n})=(W_{t1},W_{t_2}-W_{t_1},\cdots,W_{t_n}-W_{t_{n-1}})\cdot\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\0&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

所以 $(W_{t1},W_{t_2},\cdots,W_{t_n})$ 是**n**维正态变量**.**

所以**W**是正态过程.

布朗运动的性质

设W= $\{W_t, t\geq 0\}$是标准布朗运动，则W具有

- 对称性　即
  $-W=\{-W_t, t\geq 0\}$也是标准布朗运动

➢ 自相似性　即对任意常数**a>0**固定的**t>0**，有

$$W_{at} \;\square\; a^{1/2}W_t$$

- 时间逆转性　即对固定的T>0，定义:

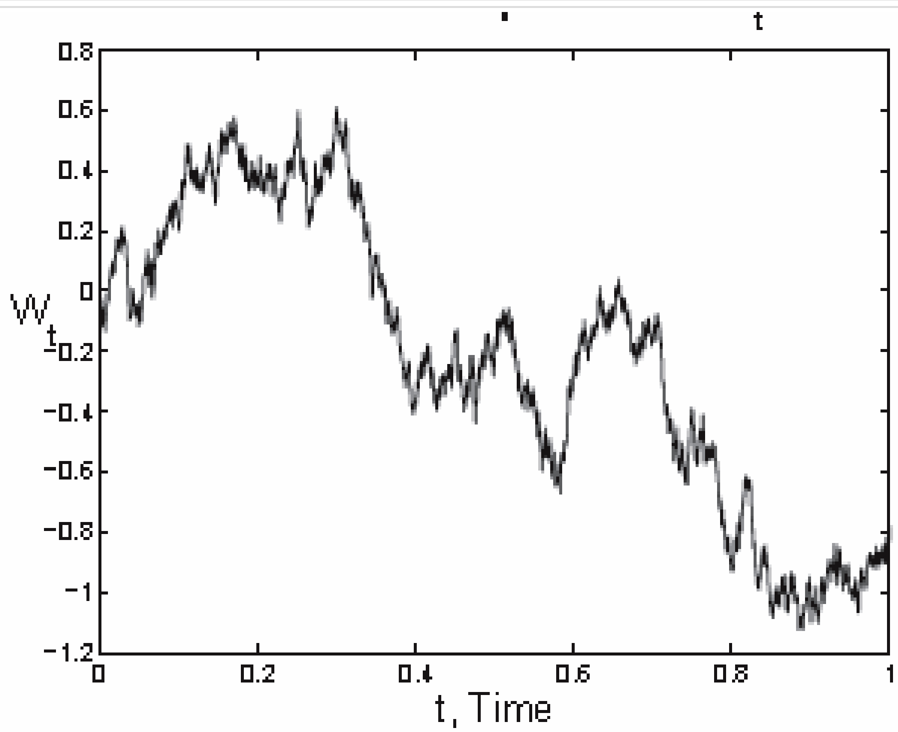
$$B_t = W_T - W_{T-t} \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

则$B = \{B_t \quad 0 \leqslant t \leqslant T\}$也是标准布朗运动.
(称为W的时间逆转过程).

- 布朗运动$\{W_t, t \geqslant 0\}$ 的轨道是连续的

事实上，利用布朗运动定义中 的（2）（3）两条件，可以验证布朗运动满足随机过程的柯尔莫哥洛夫（轨道）连续性判断准则。

布朗运动的仿真样本轨道



- 布朗运动{W(t),t≥0} 的轨道是不可微的

事实上，有 $$P\left(\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta W_t}{\Delta t}\right| > x\right) = 1$$

与布朗运动的相关的随机过程

设**W= {W_t,t≥0}**是标准布朗运动，

1. **d-**维标准布朗运动
   如果**W^1,…,W^d,**是**d**个相互独立的标准布朗运动，
   则称**(W^1,…,W^d)**是**d-**维标准布朗运动**.**

2. $(\mu,\sigma^2)-$布朗运动

设$\mu \in \mathrm{R}$, $\sigma > 0$, 定义

$$\mathrm{B}_t^{\mu,\sigma^2} = \mu t + \sigma W_t, \qquad t \geq 0$$

则称随机过程$\mathrm{B}^{\mu,\sigma^2} = \{\mathrm{B}_t^{\mu,\sigma^2}, t \geq 0\}$为$(\mu, \sigma^2)-$布朗运动

例1　计算(μ, σ^2)-布朗运动的均值函数和相关函数

例2 验证(μ, σ^2)-布朗运动是一个正态过程

证明 对任意的n≥2, 及任意的 $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n$

$$B_{t1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$$ 相互独立且

$B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$服从$N(\mu(t_k - t_{k-1}), \ \sigma^2(t_k - t_{k-1}))$分布

所以 $(B_{t1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$是n维正态变量.

又由于

$$(B_{t1},B_{t_2},\cdots,B_{t_n})=(B_{t1},B_{t_2}-B_{t_1},\cdots,B_{t_n}-B_{t_{n-1}})\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

所以 $(B_{t1},B_{t_2},\cdots,B_{t_n})$ 是n维正态变量.

所以,(μ,σ^2)-布朗运动是一个正态过程

3. 布朗桥

对任意的$t \in [0,1]$，定义

$$B_t^{br} = W_t - tW_1,$$

则称随机过程$B^{br} = \{B_t^{br}, t \in [0,1]\}$为从0到0的布朗桥

易知：$B_0^{br} = B_1^{br} = 0$

例3　计算布朗桥的均值函数和相关函数

例4　验证布朗桥是正态过程

例5　定义从a到b的布朗桥：

$$B_t^{a\to b}=a+(b-a)t+B_t^{br},t\in[0,1]$$

其中a和b为实数

试计算其数字特征，并验证它也是正态过程

多元特征函数

设n维随机变量$X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$的联合分布函数为$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$,则称

$$\varphi(u_1,u_2,\cdots u_n)=\mathrm{E}[e^{j(u_1X_1+u_2X_2+\cdots+u_nX_n)}]$$

$$=\mathrm{E}[e^{juX^T}]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j(u_1x_1+u_2x_2+\cdots+u_nx_n)}dF(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

为n维随机变量X的特征函数.也称多元特征函数

n维正态变量的特征函数

设n维随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$服从正态分布N（μ，C）

其中μ为均值向量，C为协方差矩阵.

则该n维向量的特征函数为

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = e^{(j\mu u^T - \frac{1}{2} u C u^T)}$$

$$= e^{j\sum_{k=1}^{n} u_k \mu_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} u_k u_l COV(X_k, X_l)}$$

正态过程的特征函数

设X= {X_t,t∈[0, +∞}}是正态过程, 对任意n≥1及$t_1,t_2,\ldots,t_n$∈[0, +∞} n维随机变量{X_{t1}, X_{t2}, …, $X_{t\,n}$)}的n维特征函数

$$\varphi(t_1,\cdots,t_n;u_1,u_2,\ldots,u_n)=e^{(jm_X(t_k)u^T-\frac{1}{2}uCu^T)}$$

$$=e^{j\sum_{k=1}^{n}u_k m_X(t_k)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}u_k u_l C_X(t_k,t_l)}$$

称为正态过程X的特征函数，其中$C_X(\cdot,\cdot)$为协方差函数.

4. 几何布朗运动

设$\mu \in \mathrm{R}$, $\sigma > 0$, 定义

$$\mathrm{B}_t^{ge} = e^{\mathrm{B}_t^{\mu,\sigma^2}}, \quad t \geq 0$$

其中$\mathrm{B}_t^{\mu,\sigma^2}$是$(\mu, \sigma^2)$−布朗运动,

则称随机过程$\mathrm{B}^{ge} = \{e^{\mathrm{B}_t^{\mu,\sigma^2}}, t \geq 0\}$为几何布朗运动

例5　计算几何布朗运动的均值函数和相关函数

解：均值函数 $m_{B^{ge}}(t)=E[B_t^{ge}]$

$$=E[e^{B_t^{\mu,\sigma^2}}]=E[e^{\mu t+\sigma W_t}]$$

$$=e^{\mu t}E[e^{\sigma W_t}]$$

$$=e^{\mu t}e^{\frac{t\sigma^2}{2}}$$

相关函数 $\mathrm{R}_{\mathrm{Bge}}(s,t)=[\mathrm{E}[e^{\mu s+\sigma W_s}e^{\mu t+\sigma W_t}]$

$$=e^{\mu(s+t)}\mathrm{E}[e^{2\sigma W_s}e^{\sigma(W_t-W_s)}]$$

$$=e^{\mu(s+t)}\mathrm{E}[e^{2\sigma W_s}]\mathrm{E}[e^{\sigma(W_t-W_s)}]$$

$$=e^{\mu(s+t)}e^{2\sigma^2 s}e^{\frac{\sigma^2}{2}(t-s)}$$

5. 反射布朗运动

定义

$$B_t^{re} = |W_t|, \qquad t \ge 0$$

$$= \begin{cases} W_t, & W_t \ge 0 \\ -W_t, & W_t < 0 \end{cases}, \quad t \ge 0$$

则称随机过程$B^{re} = \{B_t^{re}, t \ge 0\}$为反射布朗运动

例6　计算反射布朗运动的一维分布函数

解: $x\ge 0$时，有

$$F(t;x)=P(B_t^{re}\le x)$$

$$=P(|W_t|\le x)=P(-x\le W_t\le x)$$

$$=\int_{-x}^{+x}\varphi_t(y)dy$$

其中$\varphi_t(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}$,即$N(0,t)$分布的密度函数

例7　计算反射布朗运动的均值函数和方差函数

解：均值函数 $m_{B^{re}}(t)=E[|W_t|]$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\varphi_t(y)dy=2\int_0^{+\infty}y\varphi_t(y)dy$$

$$=2\int_0^{+\infty}y\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}dy$$

(令 $z=\frac{y}{\sqrt{t}}$)

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2t}}\frac{y}{\sqrt{t}}dy$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}z\sqrt{t}dz=\sqrt{\frac{2t}{\pi}}$$

方差函数 $D_{B^{re}}(t)=E[|W_t|^2]-E[|W_t|]^2$

$$=E[|W_t|^2]-\frac{2t}{\pi}=t-\frac{2t}{\pi}$$

6. 奥恩斯坦-乌伦贝克过程

设$\alpha > 0$，定义

$$\mathrm{B}_t^{ou} = e^{-\alpha t} W_{\gamma(t)}, \qquad t \geq 0$$

其中$\gamma(t) = \int_0^t e^{2\alpha s} ds = \frac{1}{2}(e^{2\alpha t} - 1)$,

则称随机过程$\mathrm{B}^{ou} = \{\mathrm{B}_t^{ou}, t \geq 0\}$为奥恩斯坦-乌伦贝克过程

例8　计算奥恩斯坦-乌伦贝克过程的均值函数和相关函数

解：均值函数 $m_{B^{ou}}(t)=E[e^{-\alpha t}W_{\gamma(t)}]$

$$=e^{-\alpha t}E[W_{\gamma(t)}]=0$$

相关函数 $R_{B^{ou}}(s,t)=E[e^{-\alpha s}W_{\gamma(s)}e^{-\alpha t}W_{\gamma(t)}]$

$$=e^{-\alpha(s+t)}E[W_{\gamma(s)}W_{\gamma(t)}]$$ 不妨设$0\le s<t$

$$=e^{-\alpha(s+t)}E[W_{\gamma(s)}(W_{\gamma(t)}-W_{\gamma(s)}+W_{\gamma(s)})]$$

$$=e^{-\alpha(s+t)}E[W_{\gamma(s)}(W_{\gamma(t)}-W_{\gamma(s)})]+e^{-\alpha(s+t)}E[W_{\gamma(s)}]^2$$

$$=0+e^{-\alpha(s+t)}E[W_{\gamma(s)}]^2$$

$$=\gamma(s)e^{-\alpha(s+t)}$$

布朗运动的逼近与仿真

三种逼近方式：

- 基于随机游动的逼近

- 布朗运动的帕里-维纳表示
（一个标准的布朗运动），给出其样本轨道的仿真

- 基于小波函数的逼近方法

作业：1、2、3、6、8