DOI：10.3901/JME.2011.19.123

抛物面索网天线的最佳型面设计方法*

杨东武 尤国强 保 宏
(西安电子科技大学机电工程学院 西安 710071)

摘要：在太空无重力工作环境下，星载索网天线反射面由张紧的网格平面拼合而成。为尽可能降低天线索网型面的原理误差，提出一种新的索网型面生成方法。方法要求抛物面索网天线型面在天线光学口径面上的投影为正三角形网格，索网反射面的型面结点均取在与理想抛物面同轴且等焦距的某映射抛物面上，投影正三角形的边长由天线反射面的焦距及型面设计的原理误差要求确定，映射抛物面的具体位置由投影正三角的边长及反射面的焦距确定。以空间任意三角形与抛物面之间的轴向方均根误差计算公式的推导为基础，讨论在天线光学口径面上投影面积为定值的空间三角形与抛物面之间轴向方均根误差取得极小值的条件，得出抛物面索网天线型面在天线光学口径面上投影为正三角形网格时原理误差最小的结论。索网型面设计的算例结果表明所提方法有效、实用。

关键词：反射面天线 近似误差 抛物面 星载天线
中图分类号：V443

Best Geometry Design Method for Paraboloid Reflectors of Mesh Antenna

YANG Dongwu YOU Guoqiang BAO hong
(School of Electromechanical Engineering, Xidian University, Xi’an 710071)

Abstract：Space-borne mesh antenna works in space environment without gravity. Under the influence of the internal tension, reflectors of mesh antenna are approximated with flat facets. Aimed at minimizing the systematic approximation error of the reflector, a geometry design method for paraboloid reflectors of mesh antenna is developed. To subdivide a paraboloid surface, the first step of the geometric scheme is to subdivide the inscribed regular hexagon of the optical aperture circle into small equilateral triangles. Then the points of intersection of these triangles are projected or mapped on the paraboloid surface using a suitable origin of coordinates to obtain the final nodal coordinates of the facets. Based on the systematic approximation error requirement in design and the paraboloid focal length of the reflector, certain formulas are given to determine the side length of the triangles and the origin coordinates of the paraboloid when the mapping is done. With axial square mean error as the measure of reflector’s precision, a formula is derived for calculating the systematic approximation error when a spatial arbitrary triangle is used to approximate part of a paraboloid reflector. And when the spatial triangle has a certain projected area on the optical aperture circle surface, the conditions for the spatial triangle to get the best approximation to the paraboloid reflector is discussed, which gives the result that when the best approximation is expected, the optical aperture circle surface should be divided into small equilateral triangles as far as possible. A comparison is done among all the design methods available in a geometry design example for a paraboloid reflector and results show the validity and feasibility of the proposed method.

Key words：Reflector antennas Approximation error Paraboloid surface Space-borne antenna

0 前言

由于发射装置的限制，大型空间天线要求轻质、可展开，为满足电性能要求，还需要有较高的型面精度[1]。可展开天线一般分为板式、索网式与充气式三类[2]，其中索网式天线由于具有收缩比大，重量轻等优点而成为各国竞相研究的热点。

Astromesh 结构是索网天线的重要结构形式之一[3-4]。索网天线反射面为金属丝网，附着于前索网背部完成电波反射任务。索网是天线反射面的主要

* 国家部委预研基金(51321040102)、国家自然科学基金(50775170)和高校基础科研(72104212)资助项目。20101006 收到初稿，20110525 收到修改稿

支撑结构。为保持反射型面的精度，索网结构及金属丝网中都存在一定的预应力[5-6]。在太空无重力环境下，网面索段呈直线，天线反射面由金属反射网张成的若干小平面拼合而成，索网结点为各小平面的顶点。显然，实际反射面与理想抛物面之间不可避免地存在一定误差。这种由若干小平面逼近理想反射面时引入的误差称为索网天线反射面的原理误差。误差大小由网格形式、网格大小以及网格的具体生成方法决定。常见网格形式包括辐射网格、三向网格及准测地线网格等。

为保证索网天线型面的原理精度能满足设计要求，AGRAWAL 等[7] 推导了等边三角形与球面之间的最小方均根误差近似计算公式，给出了网面索段的最大长度限制公式以及焦径比大于 0.5 的浅抛物面反射面的型面网格生成方法。李刚等[8-9]以索段对应弧长不大于最大索段长度限制为主要思想，提出了抛物面弧长等分的网格生成方法，对 AGRAWAL 方法进行了改进。

从严格意义上讲，在曲面上将所有三角形网格都划分为等边三角形是不可行的，因此，以上两种型面网格生成方法中的型面误差计算公式都是近似的。本文首先对以上两种网格生成方法作简要介绍；然后以三角形平面与抛物面之间的最佳逼近问题为出发点，提出抛物面索网天线的最佳型面设计方法。结合抛物面型面误差精确计算公式的推导和型面设计算例，说明本文型面设计方法的正确性、有效性和实用性。

1 一般型面网格生成方法

早在 1981 年，AGRAWAL 等[7]提出了索网天线型面中索段最大长度的最小方均根值 $\delta_{\rm rms}$ 确定法，其基本思想如下。

首先，对焦距为 f、口径为 D 的旋转抛物面天线反射面，将变曲率的抛物面用半径为 R 的球面近似，二者在顶点及周边点处重合，如图 1 所示。

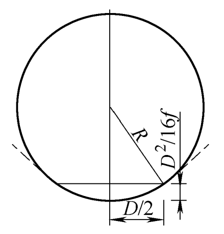


图 1 抛物面的球面近似

球面半径 R 与天线抛物面焦距 f 和口径 D 的关系为

$$R = 2f + \frac{D^2}{32f} \tag{1}$$

然后，用一系列由索网张成的三角形网格小平面来逼近球面。假设各索段长度近似相等且记为 l，此时产生的型面方均根误差

$$\delta_{\rm rms} \approx \frac{l^2}{8\sqrt{15}R} \tag{2}$$

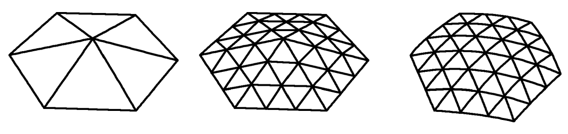
将式(1)代入式(2)，得

$$\delta_{\rm rms} \approx \frac{l^2}{8\sqrt{15}\left(2f + \dfrac{D^2}{32f}\right)} \tag{3}$$

由式(3)可导出索网型面中的索段最大长度限制公式

$$l \leq \sqrt{8\sqrt{15}\delta_{\rm rms}\left(2f + \frac{D^2}{32f}\right)} = l_{\max} \tag{4}$$

在以上索段最大长度 $l_{\max}$ 确定的基础上，AGRAWAL 等[7]给出了型面网格的生成方法。首先以天线口径圆的内接正六边形与抛物面的顶点一起构成六棱柱；接着对该六棱柱的侧面进行网格划分，要求网格边长不大于最大索段长度 $l_{\max}$。最后，将划分好的网格投影到某抛物面上，生成索网型面结点的空间位置。如图 2 所示。



(a) 六棱柱 (b) 划分网格的六棱柱 (c) 型面网格

图 2 AGRAWAL 的网格生成过程

考虑到 AGRAWAL 的网格生成方法中，网面的实际索段长度要大于棱边的网格划分长度，在极端情况下，网面的最大索长可能不满足式(4)中的索段最大长度限制的要求，因此，李刚等[10]提出了沿弧长划分网格的方法。方法中，网面索段分为主索、副索和次索；主索为径向索段，副索为环向索段，次索为其他连接主索与副索的索段；主索结点将对应抛物线的弧长等分且保证各分段弧长均小于最大索段长度 $l_{\max}$，副索连接两个主索结点并以副索结点将两个主索结点间的投射线段等分。

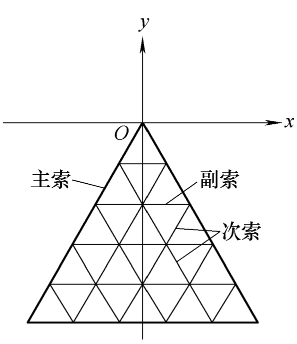


图 3 沿弧长等分的网格划分方法

由于以上两种方法均以 AGRAWAL 等[7]的索段最大长度限制公式为理论基础，而索段最大长度限制公式是基于三角形平面与球面的逼近误差计算公式而得，因此，用以上方法所设计的抛物面型面可能并不是最佳方案。

另外，以上两种方法均需将划分好的网格投影到某一抛物面上以形成天线反射面型面，然而，该抛物面与天线理想反射面之间的位置关系并未明确给出，实际使用过程中往往需要对设计好的型面进行拟合来求取天线馈源的适当安放位置。

为弥补以上方法的不足，本文直接从三角形平面与抛物面的最佳逼近问题出发，专门研究抛物面索网天线的网格划分方法。

2　三角形平面与抛物面的最佳逼近

设天线理想反射面为旋转抛物面 p_1，焦距为 f。$\triangle ABC$ 为空间任意三角形，且在抛物面 p_1 轴线的垂面内投影面积为定值 S。为获得较好的型面逼近，下面讨论$\triangle ABC$ 与抛物面 p_1 之间轴向方均根误差取得极值的条件。

首先，假设$\triangle ABC$ 在抛物面 p_1 轴线的垂面内投影为$\triangle A'B'C'$，底边 $B'C'$的长度为 l_1，对应的高度为 h_1，且抛物面 p_1 的空间方程式为

$$w=\frac{u^2+v^2}{4f} \tag{5}$$

为方便讨论，建立新的坐标系 $Oxyz$，使 x 轴平行于边 $B'C'$，z 轴与抛物面的轴线 w 轴重合，如图 4 所示。

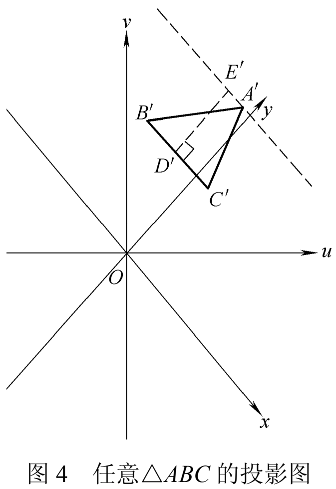


图 4　任意$\triangle ABC$ 的投影图

在坐标系 $Oxyz$ 中，抛物面 p_1 的方程见式(6)

$$z=\frac{x^2+y^2}{4f} \tag{6}$$

取边 $B'C'$的中点为 D'，做辅助直线 $D'E'$和 $A'E'$，使得 $D'E'\perp B'C'$且 $A'E'/\!/C'B'$，并假设点 B'坐标为(x_0, y_0)。点 A'和点 E'之间的距离用变量 u 的绝对值来表示，且 $u>0$ 表示点 A'的 x 坐标值大于点 E'的 x 坐标值。于是，$\triangle ABC$ 的顶点坐标如下

$$P_A=\left(x_0+\frac{l_1}{2}+u, y_0+h_1, \frac{\left(x_0+\frac{l_1}{2}+u\right)^2+(y_0+h_1)^2}{4f}+\delta_1\right)$$

$$P_B=\left(x_0, y_0, \frac{x_0^2+y_0^2}{4f}+\delta_2\right)$$

$$P_C=\left(x_0+l_1, y_0, \frac{(x_0+l_1)^2+y_0^2}{4f}+\delta_3\right)$$

式中，δ_1，δ_2，δ_3 依次为$\triangle ABC$ 的三个顶点 A、B 和 C 与抛物面 p_1 沿轴线方向的偏移量。

随着参数 x_0、 y_0、l_1 、h_1、u 和 δ_1、δ_2、δ_3 的变化，$\triangle ABC$ 可表示空间任意一个投影面积为 S 的三角形。

利用$\triangle ABC$ 的顶点坐标可以得出，在 Oxy 平面内直线 $A'B'$的方程为

$$x=k_1y+b_1 \tag{7}$$

直线 $A'C'$的方程为

$$x=k_2y+b_2 \tag{8}$$

式中

$$k_1=\frac{l_1+2u}{2h_1}$$

$$b_1=x_0-\frac{l_1+2u}{2h_1}y_0$$

$$k_2=-\frac{l_1-2u}{2h_1}$$

$$b_2=l_1+x_0+\frac{l_1-2u}{2h_1}y_0$$

在坐标系 $Oxyz$ 中，$\triangle ABC$ 所在平面的方程为

$$z=ax+by+c \tag{9}$$

式中

$$a=\frac{l_1+2x_0}{4f}+\frac{\delta_3-\delta_2}{l_1}$$

$$b=\frac{4u^2-l_1^2+4h_1^2+8h_1y_0}{16fh_1}+\frac{u(\delta_2-\delta_3)}{h_1l_1}-\frac{\delta_2+\delta_3-2\delta_1}{2h_1}$$

$$c=-\frac{l_1x_0+x_0^2+h_1y_0+y_0^2}{4f}+\frac{(l_1^2-4u^2)y_0}{16fh_1}+\delta_2+\frac{h_1x_0-uy_0}{h_1l_1}(\delta_2-\delta_3)+\frac{y_0(\delta_2+\delta_3-2\delta_1)}{2h_1}$$

结合式(7)～(9)，$\triangle ABC$ 与抛物面 p_1 之间的轴向均方误差值可通过对投影$\triangle A'B'C'$的面积分得到

$$\delta_{\mathrm{rms}}^2=\frac{1}{S}\int_{y_0}^{y_0+h_1}\int_{k_1y+b_1}^{k_2y+b_2}\left(ax+by+c-\frac{x^2+y^2}{4f}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$
$$\frac{1}{23\,040f^2}(48h_1^4+56h_1^2l_1^2+27l_1^4+96h_1^2u^2+72l_1^2u^2+48u^4)+\frac{1}{6}(\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2+\delta_1\delta_2+\delta_2\delta_3+\delta_1\delta_3)+\frac{1}{120f}(h_1^2+u^2)(4\delta_1+3\delta_2+3\delta_3)+\frac{l_1^2}{480f}(8\delta_1+11\delta_2+11\delta_3)+\frac{l_1u}{120f}(\delta_2-\delta_3) \tag{10}$$

为考察式(10)的极值，不妨先假定投影三角形$\triangle A'B'C'$是确定的，即 l_1、h_1 和 u 均为常量。此时，要使 $\delta_{\mathrm{rms}}>0$ 取得极值，则

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\delta_{\mathrm{rms}}^2}{\partial\delta_1}=0\\[2ex]\dfrac{\partial\delta_{\mathrm{rms}}^2}{\partial\delta_2}=0\\[2ex]\dfrac{\partial\delta_{\mathrm{rms}}^2}{\partial\delta_3}=0\end{cases} \tag{11}$$

通过求解式(11)得到

$$\begin{cases}\delta_1=-\dfrac{12h_1^2+l_1^2+12u^2}{160f}\\[2ex]\delta_2=-\dfrac{4h_1^2+7l_1^2+8l_1u+4u^2}{160f}\\[2ex]\delta_3=-\dfrac{4h_1^2+7l_1^2-8l_1u+4u^2}{160f}\end{cases} \tag{12}$$

由于投影三角形$\triangle A'B'C'$给定时，$\triangle ABC$ 与抛物面 p_1 之间的轴向方均根误差 δ_{rms} 必然存在最小值。记 $e=\delta_{\mathrm{rms}}$，并将式(12)代入式(10)并整理后得到

$$e_{\min}^2=\frac{1}{230\,400f^2}(48h_1^4+8h_1^2l_1^2+27l_1^4)+\frac{u^2}{9\,600f^2}(4h_1^2+3l_1^2+2u^2) \tag{13}$$

式中，$e_{\min}^2$ 为在投影三角形$\triangle A'B'C'$的形状和大小确定的情况下，$\triangle ABC$ 与抛物面 p_1 之间的轴向均方误差 δ_{rms}^2 最小值。

进一步，考虑投影三角形$\triangle A'B'C'$的形状可变，即 l_1、h_1 和 u 均为变量的情况下，空间任意三角形$\triangle ABC$ 与抛物面 p_1 之间的轴向方均根误差 δ_{rms} 的最小值。

由于空间任意三角形$\triangle ABC$ 的面积为定值 S，且

$$S=\frac{1}{2}h_1l_1 \tag{14}$$

式(13)经整理后为

$$e_{\min}^2=\frac{S^2}{720f^2}+\frac{(h_1^4-3S^2)^2}{4\,800f^2h_1^4}+\frac{u^2}{9\,600f^2}(4h_1^2+3l_1^2+2u^2) \tag{15}$$

由式(15)不难得知，投影面积为定值 S 的空间任意三角形$\triangle ABC$ 与抛物面 p_1 之间的轴向方均根误差 δ_{rms} 的最小值为

$$e_{\min}=\sqrt{\frac{S^2}{720f^2}}=\frac{S}{12\sqrt{5}f} \tag{16}$$

而且 δ_{rms} 取得极值的条件为

$$h_1^4-3S^2=0 \tag{17}$$

$$u=0 \tag{18}$$

同时式(10)也必须取得极值，即式(12)成立。

由式(18)知，$\triangle A'B'C'$必须为等腰三角形。由式(14)及式(17)知

$$h_1=\frac{\sqrt{3}}{2}l_1 \tag{19}$$

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}l_1^2 \tag{20}$$

即$\triangle A'B'C'$必须为等边三角形。

将式(19)和式(20)代入式(12)并整理得

$$\delta_1=\delta_2=\delta_3=-\frac{l_1^2}{16f}=-\frac{S}{4\sqrt{3}f} \tag{21}$$

结合$\triangle ABC$ 的顶点坐标中 δ_1、δ_2 和 δ_3 的含义知，$\triangle ABC$ 的所有顶点均位于与抛物面 p_1 同轴且等焦距的某一抛物面 p_2 上，抛物面 p_1 和 p_2 之间的轴向距离由式(21)确定。

将式(20)代入式(16)得到$\triangle ABC$ 与抛物面 p_1 之间的轴向方均根误差 δ_{rms} 的最小值为

$$e_{\min}=\frac{S}{12\sqrt{5}f}=\frac{l_1^2}{16\sqrt{15}f} \tag{22}$$

若记抛物面 p_1 为有效抛物面或理想抛物面；抛物面 p_2 为映射抛物面，即三角形小平面顶点所在的抛物面，则由以上的讨论可知，为获得对有效抛物面 p_1 的最佳逼近，用于逼近有效抛物面的三角形型面网格在抛物面 p_1 轴线的垂面内应投影为正三角形网格，而且型面网格结点均应落在与有效抛物面同轴且等焦距的映射抛物面 p_2 上。据此给出以下最佳索网型面设计方法。

3 最佳索网型面设计方法

假设抛物面天线的反射面焦距为 f，型面精度

要求为轴向方均根误差不大于 δ_{rms}，则天线最佳型面网格的生成步骤如下。

(1) 在天线反射面的光学口径面内，取口径圆的内接正六边形进行三角形网格划分，要求划分好的三角形均为正三角形(图 5a)，且由式(22)知正三角形的边长 l_1 应满足

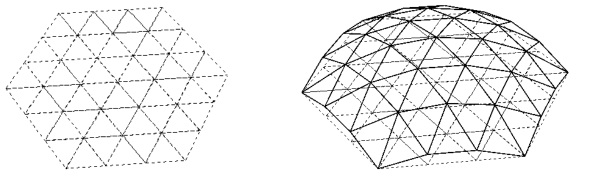
$$l_1 \le \sqrt[4]{3\,840}\sqrt{f\delta_{rms}} \tag{23}$$

(2) 将理想抛物面沿其轴线方向平移 δ 后得到映射抛物面，由式(21)知

$$\delta = -\frac{l_1^2}{16f} \tag{24}$$

式中，负号表示抛物面的平移方向与其开口方向相反。

(3) 将光学口径面上的三角形网格结点投影到映射抛物面上(图 5b)，得到索网天线型面的空间结点位置。



(a) 光学口径面网格划分　　(b) 网格映射

图 5　最佳型面网格的生成过程

4　型面设计方法的比较

以某口径为 10 m，焦距为 6 m 的旋转抛物面索网天线[10]的反射面型面设计为例。分别以 AGRAWAL 方法、沿弧长划分网格的方法和本文方法进行网格划分，得到结果如下。

(1) 为保证索网型面误差不大于 3 mm，三向网格索网天线型面的网格划分过程中，沿口径圆直径方向的最大分段数均应为 10。

(2) 若 AGRAWAL 方法中六棱柱的棱边为等长划分，则本文方法与 Agrawal 方法所获得的型面几何相同，型面网格在天线光学口径面上的投影均为正三角形网格，而沿弧长划分网格的方法所获得的型面网格投影并非正三角形网格。

(3) 沿弧长划分网格的方法中，有效抛物面的最佳位置与实际索网型面沿轴线方向的偏移量 δ 需要通过类似于文献[11]的优化方法求取，而本文方法中偏移量 δ 直接由式(24)给出。

(4) 型面误差比较：沿弧长划分网格的方法，有效抛物面的最佳位置与实际索网型面沿轴线方向的偏移量 δ 通过优化方法[11]获得，其值为 10.43 mm；相应的型面轴向方均根误差 δ_{rms}=2.72 mm。本文方法，l_1=1 m，有效抛物面的最佳位置与实际索网型面沿轴线方向的偏移量 δ=10.42 mm；型面的轴向方均根误差 δ_{rms}=2.69 mm。

以上结果表明本文方法较为简单、实用且有效。结合文献[6]可知，本文方法获得的索网结构具有较好的力平衡特性，能够使索网预拉力的优化设计问题大大简化。因此，从索网预拉力优化设计的角度来看，本文方法所生成的索网型面适合于工程应用。

5　结论

(1) 为获得较好抛物面型面逼近，索网天线型面网格在光学口径面上的投影应该为正三角形网格，且所有型面结点均应位于与理想抛物面同轴且等焦距的某一映射抛物面上。

(2) 给出了索网型面网格生成时，投影正三角网格的边长确定公式以及映射抛物面相对于理想抛物面位置关系的计算公式。

(3) 文中所给专门用于抛物面索网天线的型面网格生成方法，对旋转抛物面和偏置抛物面反射面天线同样适用。

参　考　文　献

[1] JIN M，TETSUO Y，KORYO M. Shape control of the tension truss antenna[J]. AIAA Journal，1990，28(2)：316-322.

[2] 刘明治，高桂芳. 空间可展开天线研究进展[J]. 宇航学报，2003，24(1)：82-87.
LIU Mingzhi，GAO Guifang. Advances in the study on structure for space deployable antenna[J]. Journal of Astronautics，2003，24(1)：82-87.

[3] KORYO M, YASUYUKI M. Concept of the tension truss antenna [J]. AIAA Journal，1990，28(6)：1098-1104.

[4] TIBERT G. Deployment tensegrity structure for space applications [D]. Stockholm ： Royal Institute of Technology Department of Mechanics，2002.

[5] 狄杰建，段宝岩，杨东武，等. 索网式星载展开天线结构纵向调整索数及其初始张力的优化[J]. 机械工程学报，2005，41(11)：153-157.
DI Jiejian，DUAN Baoyan，YANG Dongwu，et al. Optimization on initial cable tensions and number of cables for a cablenet deployable space-borne antenna [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering，2005，41(11)：153-157.

[6] 杨东武，保宏. 非对称索网抛物面天线力平衡特性及预拉力设计[J]. 机械工程学报，2009，45(8)：308-312.

YANG Dongwu，BAO Hong. Force balance characteristics of and pretension design of asymmetric cable net parabolic antenna [J]. Journal of Mechanical Engineering，2009，45(8)：308-312.

[7] AGRAWAL P K，ANDERSON M S，CARD M F. Preliminary design of large reflectors with flat facets [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation，1981，29(4)：56-63.

[8] 李刚. 空间可展天线结构的设计分析与索膜结构分析[D]. 杭州：浙江大学，2004.
LI Gang. The design and analysis of deployable antenna on satellites & the analysis of cable membrane structure [D]. Hangzhou：Zhejiang University，2004.

[9] 李团结，周懋花，段宝岩. 可展天线的柔性索网结构找形分析方法 [J]. 宇航学报，2008，29(3)：794-798.
LI Tuanjie，ZHOU Maohua，DUAN Baoyan. A method of form-finding analysis for flexible cable net structures of deployable antennas [J]. Journal of Astronautics，2008，29(3)：794-798.

[10] 李刚，关富玲. 环形桁架展开天线索网的预拉力优化技术及工程应用[J]. 固体力学学报，2006，27(S1)：174-179.
LI Gang，GUAN Fuling. Optimization of pretension in net of astromesh deployable reflector and engineering application [J]. ACTA Mechanica Solida Sinica，2006，27(S1)：174-179.

[11] 马增祥，杨德华，王淑青，等. 基于刚体位移的天线反射面拟合新算法[J]. 机械工程学报，2010，46(18)：29-35.
MA Zengxiang，YANG Dehua，WANG Shuqing，et al. Antenna reflector surface fitting algorithm based on rigid body displacement principle [J]. Journal of Mechanical Engineering，2010，46(18)：29-35.

作者简介：杨东武，男，1978 年出生，博士，副教授。主要研究方向为索网天线结构设计、多柔体系统动力学。

E-mail：ydw_1978@126.com

尤国强，男，1980 年出生，博士研究生。主要研究方向为空间结构优化设计。

E-mail：simonyou@yom.com

保宏，男，1971 年生，博士，副教授。主要研究方向为结构与控制优化设计。

E-mail：bh-029@163.com