《矢量和复变函数》作业 7

2012.9.20

1. 证明 $\nabla\times(uA)=u\nabla\times A+\nabla u\times A$.

2. 证明 $\nabla(A\cdot B)=A\times(\nabla\times B)+(A\cdot\nabla)B+B\times(\nabla\times A)+(B\cdot\nabla)A$.

[提示：$c(a\cdot b)=(a\cdot c)b+a\times(c\times b)$.]

3. 证明 $(A\cdot\nabla)A=\dfrac{1}{2}\nabla(A)^2-A\times(\nabla\times A)$.

6. 设 a,b 为常矢，$r=xi+yj+zk$，$r=|r|$. 证明

(1) $\nabla(r\cdot a)=a$;

(2) $\nabla\cdot(ra)=\dfrac{1}{r}(r\cdot a)$;

(3) $\nabla\times(ra)=\dfrac{1}{r}(r\times a)$;

(4) $\nabla\times[(r\cdot a)b]=a\times b$;

(5) $\nabla(|a\times r|^2)=2[(a\cdot a)r-(a\cdot r)a]$.

[提示：利用公式 $(a\times b)\cdot(c\times d)=(a\cdot c)(b\cdot d)-(a\cdot d)(b\cdot c)$.]

*7. 已知函数 u 与无源场 A 分别满足：

$$\Delta u=F(x,y,z)$$
$$\Delta A=-G(x,y,z),$$

求证 $B=\nabla u+\nabla\times A$ 满足如下方程组

$$\begin{cases}\nabla\cdot B=F(x,y,z),\\ \nabla\times B=G(x,y,z).\end{cases}$$

*8. 设 S 为区域 Ω 的边界曲面，n 为 S 的向外单位法矢，f 与 g 均为 Ω 中的调和函数. 证明

(1) $\displaystyle\oiint_S f\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}S=\iiint_\Omega|\nabla f|^2\mathrm{d}V$;

(2) $\displaystyle\oiint_S f\frac{\partial g}{\partial n}\mathrm{d}S=\oiint_S g\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}S$.