《矢量和复变函数》作业　4

2012.9.7

2. 求数量场 $u=3x^2z-xy+z^2$ 在点 $M(1,-1,1)$ 处沿曲线 $x=t,y=-t^2$，$z=t^3$ 朝 t 增大一方的方向导数.

3　数量场 $u=x^2yz^3$ 在点 $M(2,1,-1)$ 处沿哪个方向的方向导数最大？这个最大值是多少？

4. 画出平面场 $u=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$ 中 $u=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2$ 的等值线，并画出场

在点 $M_1(2,\sqrt{2})$ 与点 $M_2(3,\sqrt{7})$ 处的梯度矢量，看其是否符合下面事实：

(1) 梯度在等值线较密处的模较大，在较稀处的模较小；

(2) 在每一点处，梯度垂直于过该点的等值线，并指向 u 增大的方向.

5. 用以下二法求数量场 $u=xy+yz+zx$ 在点 $P(1,2,3)$ 处沿其矢径方向的方向导数.

(1) 直接应用方向导数公式；

(2) 将方向导数作为梯度在该方向上的投影.

8. 求数量场 $u=3x^2+5y^2-2z$ 在点 $M(1,1,3)$ 处沿其等值面朝 Oz 轴正向一方的法线方向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$.

*9. 证明 $\mathbf{grad}\ u$ 为常矢的必要和充分条件是 u 为线性函数：

$$u=ax+by+cz+d\quad(a,b,c,d\text{ 为常数}).$$

*10. 若在数量场 $u=u(M)$ 中恒有 $\mathbf{grad}\ u=\mathbf{0}$，证明 $u=$ 常数.

*11. 设函数 $u=u(M)$ 在点 M_0 处可微，且 $u(M)\leqslant u(M_0)$，试证明在点 M_0 处有 $\mathbf{grad}\ u=\mathbf{0}$.