14

保角变换

数学即使发展到了现在，从大的方面去观察，依然是代数和几何两个分支。

留数定理 复代数	保角变换 复几何

复代数和复几何

今天重点讨论的正是保角变换这一复几何分支。

复函数用几何表示的最大特点是要用两个平面表示，称之为 mapping，映射

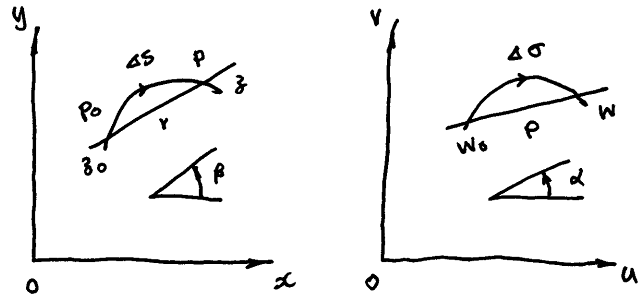
$$w = f(z)$$

而解析函数之映射具有保角性质。

一、解析函数的保角特性

保角映射 —— 亦称保角变换，它是解析函数的几何反映。

设 C 是一条连续曲线，参数方程 $z=z(t)$，$\alpha \le t \le \beta$，且 $z'(t_0) \ne 0$ $(\alpha < t_0 < \beta)$，则 $z'(t_0)$ 表示向量与 C 相切于 $z_0 = z(t_0)$



z- Plane　　　w- plane

复曲线导数

按规定的增大方向，P_0 处的切线

$$z'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t_0+\Delta t) - z(t_0)}{\Delta t}$$

这矢量与x轴夹角是 $\operatorname{Arg} z'(t_0)$.

> Note：这里所讨论的是复曲线导数（曲线的走向由t决定），而不是复导数，其意义方式又与矢量类似。

现在，让我们来研究 $W=f(z)$，它是在z_0处解析的解析函数，$f'(z_0)\neq 0$，$W=f[z(t)]$，$a\leq t\leq B$。

将z-plane的复曲线C映射到w-plane的曲线Γ，可以写出

$$W'(t_0)=f'(z_0)z'(t_0)\neq 0$$

$$\operatorname{Arg} W'(t_0)=\operatorname{Arg} f'(z_0)-\operatorname{Arg} z'(t_0)$$

于是可以写出

$$\boxed{\operatorname{Arg} w'(t_0)-\operatorname{Arg} z'(t_0)=\operatorname{Arg} f'(z_0)}$$

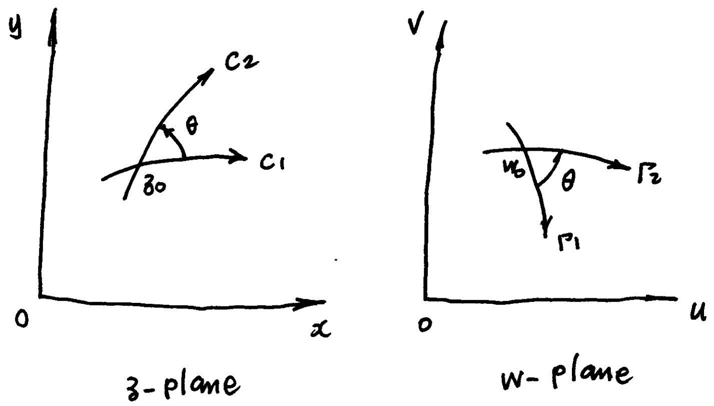
上面公式十分重要，它表示只需$f(z)$是解析函数，且z_0确定（它与曲线c和Γ无关），则 $\operatorname{Arg} f'(z_0)$ 即是唯一的，它表示转动角之差，有

$$\boxed{\operatorname{Arg} f'(z_0)=\alpha-\beta}$$

所以，倘若有两条曲线（C_1和C_2）交于z_0有

$z=z_1(t)$，$z=z_2(t)$，　$a\leq t\leq b$，

映射成交于w_0的两条曲线Γ_1和Γ_2。



解析函数变换的保角性

亦可写出

$$\boxed{\operatorname{Arg} z_2'(t_0)-\operatorname{Arg} z_1'(t_0)=\operatorname{Arg} w_2'(t_0)-\operatorname{Arg} w_1'(t_0)}$$

变换后两条曲线（Γ_1和Γ_2）之间夹角θ不变——此即保角性。

另一方面，我们还要讨论 $|f'(z_0)|$ 变换的几何意义。

设
$$\begin{cases} z-z_0=re^{i\theta} \\ w-w_0=\rho e^{i\varphi} \end{cases}$$

则
$$\left(\frac{w-w_0}{z-z_0}\right)=\frac{\rho}{r}e^{i(\varphi-\theta)}=\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}\frac{\rho}{\Delta\rho}\cdot\frac{\Delta s}{r}e^{i(\varphi-\theta)}$$

Note：
$$\lim_{z\to z_0}\frac{\rho}{\Delta\sigma}=1,\quad \lim_{w\to w_0}\frac{\Delta s}{r}=1.$$

因此有
$$|f'(z_0)|=\lim_{z\to z_0}\left(\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}\right)$$

可以看出：$|f'(z_0)|$ 是经过 $w=f(z)$ 映射后通过 z_0 的曲线在 w_0 的伸缩率。

它与曲线C的形状与方向无关，这也称为伸缩率不变性。

【定理】 若函数 $w=f(z)$ 在 z_0 处解析，且 $f'(z_0)\neq 0$，则 $w=f(z)$ 在 z_0 处保角，且 $\operatorname{Arg} f'(z_0)$ 表示此映射在 z_0 处的转角，$|f'(z_0)|$ 表示在 z_0 处的伸缩率，且伸缩率不变。

【定义】 凡具有保角性和伸缩率不变性的映射称为保角映射，进一步称为第一类保角映射。

【定理】 若 $\varphi(x,y)$ 是 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

的解，现设 $z=x+iy$，$w=u+iv$，研究保角映射（即 $f'(z)\neq 0$）则必有

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}=0$$

即在 w-plane 仍满足 Laplace 方程.

【证明】 可以写出

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}\\[2ex] \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial v\partial u}\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}\\[2ex] \qquad+\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\dfrac{\partial v}{\partial x}\\[2ex] \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial u}\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)\dfrac{\partial u}{\partial y}\\[2ex] \qquad+\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)\dfrac{\partial v}{\partial y}\end{cases}$$

上面两式相加，有

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

$$+\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y}\right)^2\right]$$

$$+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right].$$

Note：这里的讨论 $w=u+iv$ 为解析函数.

(I). $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

(II). $$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

上式应用了解析函数 Cauchy-Riemann 条件.

(III). $$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2=|f'(z)|^2$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2=|f'(z)|^2$$

最后归纳为

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=|f'(z)|^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right)=0$$

计及 $f'(z)\neq 0$ 的条件，即证得

$$\boxed{\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}=0}$$

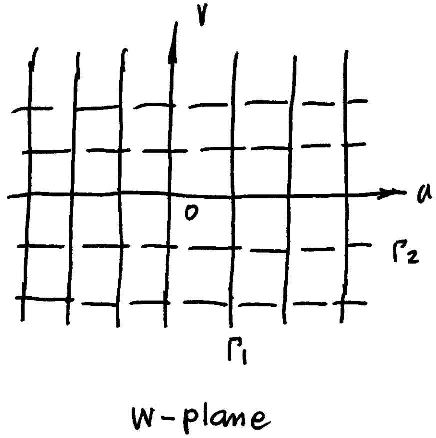
这一结论非常重要，它清楚表明：电位函数φ经过保角变换后还是电位函数；力线函数经过保角变换还是力线函数——于是有了能电容C不变。

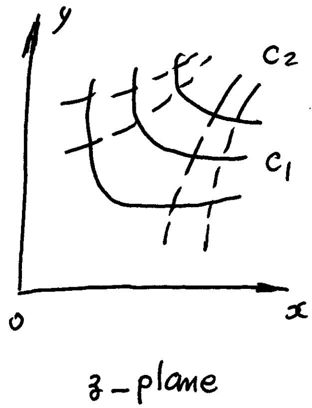
二、保角映射中电容C的不变性

已经讲过 $u(x,y)=\Gamma_1$

$v(x,y)=\Gamma_2$

且Γ_1与Γ_2正交，那么由解析函数 $w=f(z)$ 在z平面的C_1和C_2曲线也正交。



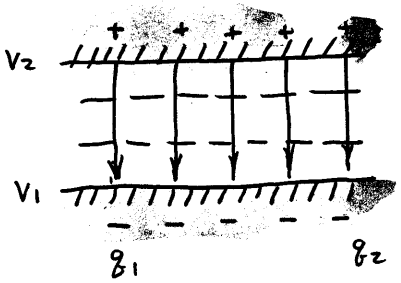


两个平面曲线对应的正交性。

若把u表示为等位线，v表示为电力线；或者反之，把u表示为电力线，v表示为等位线。大家知道电力线和等位线相互正交。

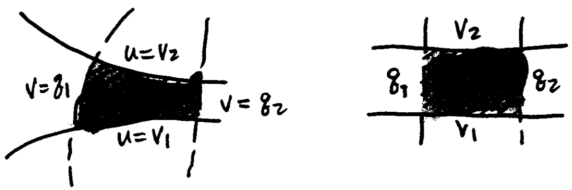
我们知道，电容C正是等位线和电力线围成的一个区域。

$$C=\frac{g_2-g_1}{V_2-V_1}$$



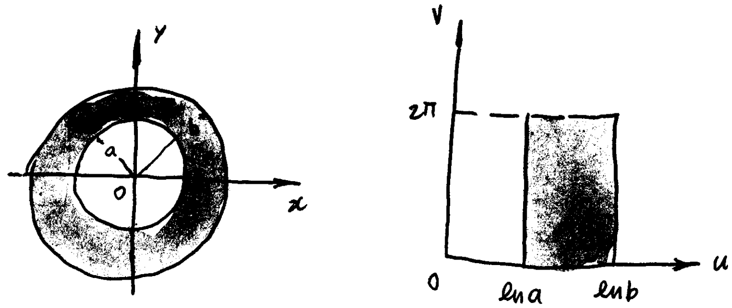
规则的平板电容C

现在的问题是：我们遇到的很多情况下，复杂区域的电容C很难求得。如果能通过保角映射，把复杂区域转换成易求的规则区域，而电位和电力线都有严格的对应性。那么，复杂区域的电容即对应简单区域的电容，这就是电容的不变性。



电容C的不变性

【例-1】 试求单位长度同轴线电容C



z-plane

w-plane

电容的区域变换 $w = Ln z$

【解】 我们把同轴线放置到 z-plane，且作保角映射 $w = Ln z = \ln r + i\theta = u + iv$

上式中 $z = re^{i\theta}$，于是有

$$\begin{cases} u = \ln r \\ v = \theta \end{cases}$$

将u表示等位线变换，v表示电力线变换。

在 w-plane 变成平板电容C。

$$\begin{cases} \text{等位线 由 } \ln a — \ln b \\ \text{电力线由 } 0 — 2\pi \end{cases}$$

平板电容C公式 $C=\dfrac{\varepsilon S}{d}$

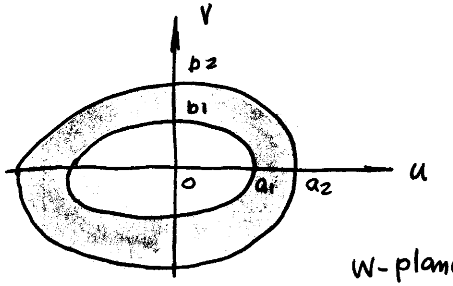
式中 $S=2\pi l$ （单位长度 $l=1$）

板间距 $d=\ln b-\ln a=\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$

可以得到 $C=\dfrac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}$

上式是平板电容，根据C的不变性，它也等于圆同轴线电容C.

【例-2】试求 a_2, b_2 和 a_1, b_1 两共焦椭圆同轴线电容C.



W-plane 椭圆同轴线

【解】先让我们给出儒可夫斯基变换

$$W=\frac{1}{2}\left(z+\frac{k^2}{z}\right) \qquad (k>0)$$

它是研究飞机机翼升力时提出的一种简单变换

设 $z=re^{i\theta}$，$\dfrac{k^2}{z}=\dfrac{k^2}{r}e^{-i\theta}$

于是可分出

$$W=u+iv=\frac{1}{2}\left(r+\frac{k^2}{r}\right)\cos\theta+i\frac{1}{2}\left(r-\frac{k^2}{r}\right)\sin\theta$$

若 $r>\dfrac{k^2}{r}$，则有

$$\begin{cases} u=\dfrac{1}{2}\left(r+\dfrac{k^2}{r}\right)\cos\theta \\ v=\dfrac{1}{2}\left(r-\dfrac{k^2}{r}\right)\sin\theta \end{cases}$$

于是得到

$$\frac{u^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r+\frac{k^2}{r}\right)\right]^2}+\frac{v^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r-\frac{k^2}{r}\right)\right]^2}=1$$

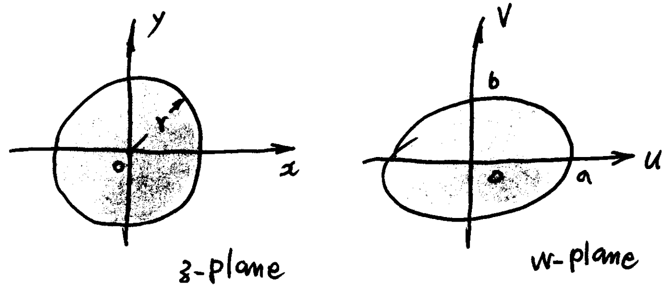
即儒可夫斯基变换，把z-plane的圆 ($re^{i\theta}$)

变为w-plane的椭圆. 若写成

$$\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1$$

其中，a和b分别表示椭圆的长半轴和短半轴.

又有 $r=a+b$



儒可夫斯基变换

电容C保持不变

$$\boxed{C=\frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{a_2+b_2}{a_1+b_1}\right)}}$$

上式表示椭圆同轴线电容C.

原式中

$$\begin{cases} a=\frac{1}{2}\left(r+\frac{k^2}{r}\right) \\ b=\frac{1}{2}\left(r-\frac{k^2}{r}\right) \end{cases}$$

则可写出

$$c^2=a^2-b^2=k^2$$

也即 $c=k$.

表示椭圆焦距.

【注记】* 不同的焦距 (如k_1和k_2)

可以有相同的电容，即

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} a' &= \frac{1}{2}\left(r+\frac{k_1^2}{r}\right) \\ b' &= \frac{1}{2}\left(r-\frac{k_1^2}{r}\right) \end{aligned}\right\} a'+b'=r \\ \left.\begin{aligned} a'' &= \frac{1}{2}\left(r+\frac{k_2^2}{r}\right) \\ b'' &= \frac{1}{2}\left(r-\frac{k_2^2}{r}\right) \end{aligned}\right\} a''+b''=r \end{cases}$$

11 月 17 日

积分“功夫”在“诗”外

在文学圈内，有一句行话称“功夫在诗外”，说的意思无非是劝导人们要打好各种基础，否则很难有好诗呈现。

前面已经谈过，实积分和复积分走得是完全不同的两条道：实积分是牛顿—莱布尼茨公式，而复积分则是“围网捕鱼”——寻找被积函数 $f(z)$ 的 Laurent 级数中负一次方系数 C_{-1}。复留数在实积分中的应用恰好就是在某些特定情况下要使它们统一起来。

我们将以实积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ 为例做出说明。对于原来做法有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\tan^{-1}(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}=\pi$$

现在再来说明把它转化为复积分的具体做法。

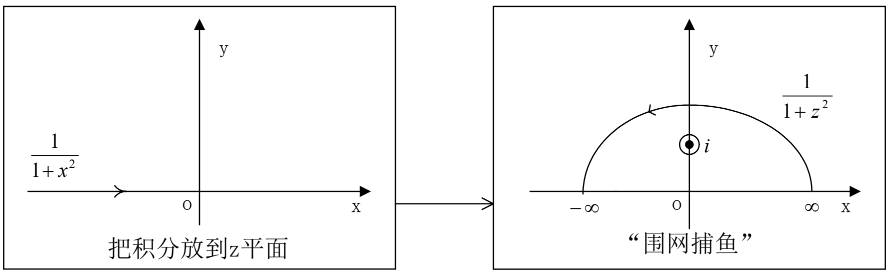
1、把原积分放到扩展的复平面 z，积分域依然在实轴；

2、构成 $(-\infty,\infty)$ 的复上半平面“围网”；

3、这时，积分值将取决于“网”中 i 点的“源”（留数），有

$$2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{1+z^2},i\right]=2\pi i\lim_{z\to i}\left[(z-i)\frac{1}{(z+i)(z-i)}\right]=\pi$$

结果完全一致，但思路却完全不同。



实积分的留数做法

实积分的留数做法使我们大吃一惊，也大开眼界。原来积分的“源”在域外，积分“功夫”在“诗”外。

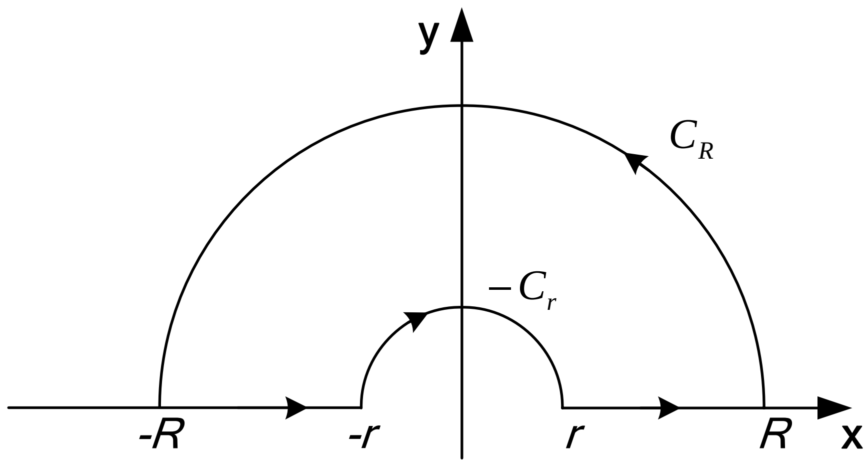
11 月 18 日

从正弦积分谈起

在《留数应用（II）》这一节，我们讨论了采用复闭路积分解决十分困难的正弦积分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

对应如下图形



利用 Cauchy-Goursat 定理，很容易得到

$$2i\int_r^R \frac{\sin x}{x} dx - i\pi \equiv 0$$

有同学提出一个尖锐的问题：$-C_r$ 把 0 点绕开了，$\int_r^R$ 积分**没有包含 0.**

问题提的对不对呢？对的！

$\int_r^R \frac{\sin x}{x} dx$ 积分限中**确实**没有包含 0。

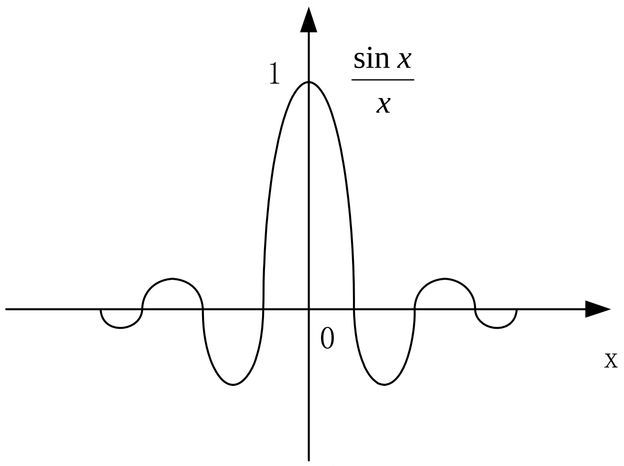
但是，实积分有一重要性质：在定积分的区间中“扣掉”若干离散点，或者加上（但不是重叠）点，积分中只要被积函数在这些点上不发散，则积分值不变。

这正是积分中**积**字的深刻含义：对积分要有贡献，除了被积

函数 $f(x)$，还必须有有限**区间**，点没有贡献。

尽管 $\int_r^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ 中没有 0 点，我们可以把 **0 点加上去**。注意到 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 不发散。积分依旧为

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$



$$\left(\frac{\sin x}{x} \right) \bigg|_{x=0} = 1$$