11

留数定理（II）

最重要的留数定义——是由把 $f(z)$ 展开成 Laurent 级数开始的

* Laurent 级数

环展开

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$$

典型积分 *

$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$$

留数定义

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz = \mathrm{Res}[f(z), z_0]$$

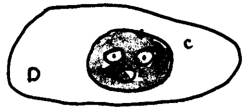
$$= C_{-1}$$

正向封闭曲线 C 是包含 z_0。

$(z-z_0)^{-1}$ 幂的系数 C_{-1} 是积分之値.

留数定义

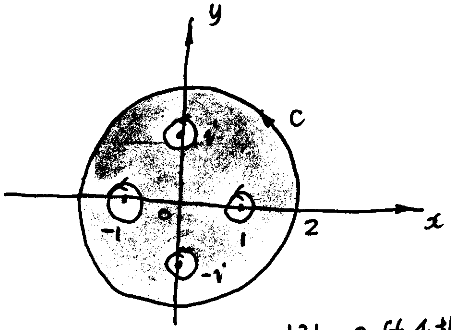
【留数第1定理】 $\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k]$



规则 I	若 z_0 是 $f(z)$ 的 1 阶极点 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z\to z_0} [(z-z_0)f(z)]$
规则 II	若 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]$
规则 III	$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ $P(z)$ 和 $Q(z)$ 在 z_0 处解析，$P(z_0)\neq 0$，$Q(z_0)=0$，$Q'(z_0)\neq 0$，z_0 是 $f(z)$ 的 1 级极点. $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$

【例-1】计算积分 $\oint_C \frac{z}{z^4-1}dz$, $C=\{z \mid |z|=2\}$

的正向曲线



$|z|=2$ 的4极点积分

【解】 被积函数 $f(z)=\frac{z}{z^4-1}$ 的4个1级极点 $\pm1, \pm i$, 全部落在 $|z|=2$ 的封闭域C内. 于是得出

$$\oint_C \frac{z}{z^4-1}dz = 2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),1]+\mathrm{Res}[f(z),-1]$$

$$+\mathrm{Res}[f(z),i]+\mathrm{Res}[f(z),-i]\}.$$

按留数规则III, $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$

$$\frac{P(z)}{Q'(z)}=\frac{z}{4z^3}=\frac{1}{4z^2}$$

于是有

$$\left.\frac{P(z)}{Q'(z)}\right|_{z_0=1}=\frac{1}{4}, \quad \left.\frac{P(z)}{Q'(z)}\right|_{z_0=-1}=\frac{1}{4}$$

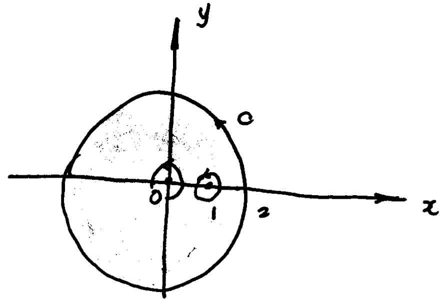
$$\left.\frac{P(z)}{Q'(z)}\right|_{z_0=i}=-\frac{1}{4}, \quad \left.\frac{P(z)}{Q'(z)}\right|_{z_0=-i}=-\frac{1}{4}$$

最后得到

$$\oint_C \frac{z}{z^4-1}dz \equiv 0.$$

【例-2】计算积分 $\oint_C \frac{e^z}{z(z-1)^2}dz$

$C=\{z \mid |z|=2\}$ 的正向曲线



$|z|=2$ 的2极点积分.

【解法1】在本例中，域C内存在2个极点：

$z=1$ 为2级极点；$z=0$ 为1级极点.

(1) $z=0$ 1级极点.

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{e^z}{z(z-1)^2}=1$$

(2). $z=1$ 2级极点

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{e^z}{z(z-1)^2}\right]$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z}\right)=\lim_{z\to 1}\frac{e^z(z-1)}{z^2}=0$$

最后得到 $\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{z(z-1)^2}dz=2\pi i$

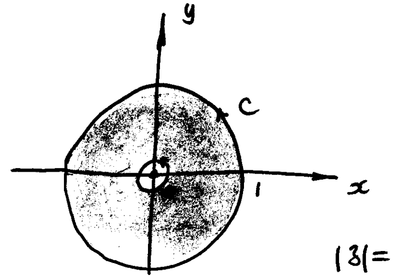
【解法2】 $$\oint_C \frac{e^z}{z(z-1)^2}dz=\oint_C e^z\left[\frac{1}{z}-\frac{z-2}{(z-1)^2}\right]dz$$

$$=\oint_C e^z\left[\frac{1}{z}-\frac{1}{(z-1)}+\frac{1}{(z-1)^2}\right]dz$$

$$=2\pi i\,[1-e+e]=2\pi i \quad ■$$

【例-3】求积分 $\displaystyle\oint_C \frac{(e^z-1)}{z^2}dz$

$C=\{z \mid |z|=1\}$ 的正向闭合曲线



$|z|=1$ 的反类极点积分

【解】$z=0$是极点，但必须仔细判别它是1级极点，因为

$$\frac{e^z-1}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left\{z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}z+\cdots$$

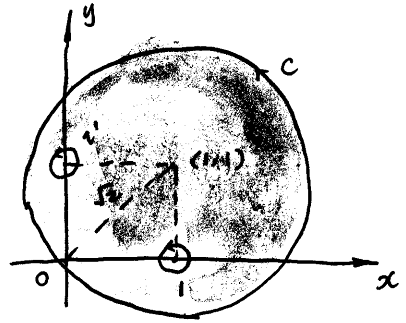
很明显看出 $C_{-1}=1$ 也即

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=C_{-1}=1$$

$$\oint_C \frac{e^z-1}{z^2}dz=2\pi i$$

【例-4】 计算积分 $\oint_C \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$

C: $x^2+y^2=2x+2y$ 正向封闭曲线



$(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 积分

【解】 C的曲线方程 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$

也即 $|z-(1+i)|=\sqrt{2}$.

在C内包含2个极点: i, 1级极点.

1, 2级极点.

在C外包含1个极点: $-i$.

$$\operatorname{Res}[f(z),i]=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)}{(z^2+1)(z-1)^2}$$

$$=-\frac{1}{2i(2i)}=\frac{1}{4}$$

$$\operatorname{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z^2+1}\right)$$

$$=\lim_{z\to 1}\left[-\frac{2z}{(z^2+1)^2}\right]=-\frac{1}{2}.$$

最后有

$$\oint_C\frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}=2\pi i\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=-i\frac{\pi}{2}$$ ■

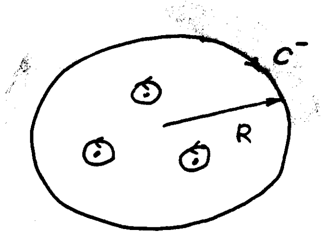
一. 无穷远点留数.

【定义】 设函数 $f(z)$ 在(广义)圆环域

$R<|z|<\infty$ 内解析. 则称 $\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)dz$

为 $f(z)$ 在 ∞ 处的留数, 记作

$$\boxed{\operatorname{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)\,dz}$$



无系点处留数.

已经知道，$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz=C_{-1}$ 于是进一步有

$$\boxed{\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-C_{-1}}$$

注意对∞点的一切性质从根本上讲都是一种推广定义.

【讨论】关于∞点留数概念必须注意如下两点：

(I). 上面结论与所取的路径C无关，只要满足 $R<|z|<\infty$ 内解析．换句话说，其意义是 $>R$ 的区域无极点.

于是环积分的贡献始终只与 C_+ 内留数有关，也就是 C_{-1} 值不会改变.

(II). 既然 $R<|z|<\infty$ 内解析，同时又存在不为0的留数，则全部不解析点只可能是∞点.

【留数定理 2】如果函数 $f(z)$ 在扩充复平面（包括∞点）内有有限个奇点，那么 $f(z)$ 在所有各点的留数之总和为0.

【证明】设 $f(z)$ 除∞点之外，存在有限个奇点 z_k $(k=1,2,\cdots n)$，C是一条将 z_k 全部包含在内的正向简单曲线，于是有

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]+\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),z_k]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)\,dz+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}f(z)\,dz$$

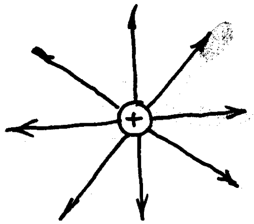
$$\equiv 0$$

■

【物理结论】物理上有一条非常著名的电荷守恒原理：即全空间（包括∞处）总电荷为0，即正负相抵，有

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \equiv 0$$

作为最简单的例子，只有一个正电荷Q，它的力线由正到负，必然∞处对应一负电荷Q



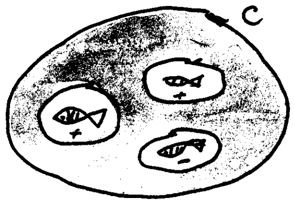
正电荷力线引向负电荷。

于是，这一负电荷只可能在∞远处，这正好相当于。

【留数定理2】

有了上述讨论，我们进一步补充“捕鱼理论”已经不够了。

因为习惯上，鱼总是实物总是+的，而留数则有正有负，闭路积分C是一张“网”，网内有两种鱼：正鱼和负鱼。



广义“捕鱼”理论

在∞远处是一面“镜子”，它可以反射出网内鱼的总数和大小。

规则Ⅳ	$\mathrm{Res}[f(z),\infty] = -\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{\xi}\right)\frac{1}{\xi^2}, 0\right]$

它反映∞处留数与0处留数的转换关系。

【证明】取半径ρ足够大的曲线C^-，且令

$z=\frac{1}{\zeta}$，又写出

$$\begin{cases} z=\rho e^{i\theta} \\ \zeta = re^{i\varphi} \end{cases} \qquad \left(\rho=\frac{1}{r},\ \theta=-\varphi\right)$$

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)\,dz=$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{-2\pi} f(\rho e^{i\theta})\, i\rho e^{i\theta}\,d\theta=-\frac{1}{2\pi i}$$

$$\int_0^{2\pi} f\left(\frac{1}{re^{i\varphi}}\right)\frac{i}{re^{i\varphi}}\,d\varphi=-\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}$$

$$f\left(\frac{1}{re^{i\varphi}}\right)\frac{1}{(re^{i\varphi})^2}\,d(re^{i\varphi})$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=\frac{1}{\rho}} f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta^2}\,d\zeta \qquad \left(|\zeta|=\frac{1}{\rho}\right)$$

已知$f(z)$在$\rho<|z|<\infty$内解析，从而$f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$

在$0<|\zeta|<\frac{1}{\rho}$内解析，换句话说

$f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta^2}$ 在$|\zeta|<\frac{1}{\rho}$内除$\zeta=0$之外，没有奇点.

于是
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=\frac{1}{\rho}} f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\left(\frac{1}{\zeta^2}\right)d\zeta=\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta^2},0\right]$$

■

【例－5】计算积分 $\oint_C \frac{z}{z^4-1}\,dz$

$C=\{z \mid |z|=2\}$ 的正向曲线

【解】本例即【例－1】情况，当$|z|\geq 2$

除$z\to\infty$点外，别无奇点.

$$\oint_C \frac{z}{z^4-1}\,dz=-2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),\infty]$$

$$=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta^2},0\right]$$

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta^2}=\frac{\frac{1}{\zeta}}{\frac{1}{\zeta^4}-1}\cdot\frac{1}{\zeta^2}=\frac{\zeta}{1-\zeta^4}$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{\zeta}{1-\zeta^4},0\right]=\lim_{\zeta\to 0}\frac{\zeta^2}{1-\zeta^4}\equiv 0$$

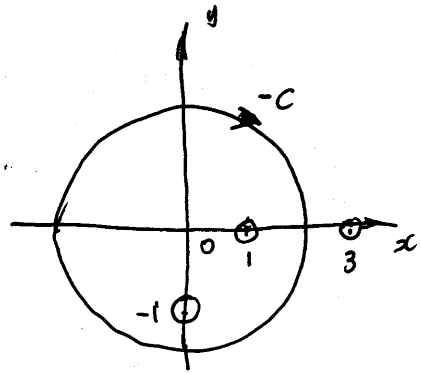
也即

$$\oint_C \frac{z}{z^4-1}dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}\left[\frac{\zeta}{1-\zeta^4}, 0\right] \equiv 0 \quad ■$$

【例-6】计算积分

$$\oint_C \frac{dz}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}$$

$C=\{z \mid |z|=2\}$ 的正向闭曲线



无穷远积分

【解】本例除∞点外，还有 $-i$，1 和 3 三个奇点。据【留数定理 2】

$$\oint_C \frac{dz}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)} = 2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),-i]$$

$$+\mathrm{Res}[f(z),1]\} = -2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),3]+$$

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]\}$$

其中，$\mathrm{Res}[f(z),3] = \lim\limits_{z\to 3}\dfrac{1}{(z+i)^{10}(z-1)} = \dfrac{1}{2(3+i)^{10}}$

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty] = -\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta^2}, 0\right]$$

$$= \lim_{\zeta\to 0} -\frac{1}{\left(\frac{1}{\zeta}+i\right)^{10}\left(\frac{1}{\zeta}-1\right)\left(\frac{1}{\zeta}-3\right)}\cdot\frac{1}{\zeta^2} \equiv 0$$

得到

$$\oint_C \frac{dz}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)} = -\frac{\pi i}{(3+i)^{10}} \qquad \blacksquare$$

利用∞点留数

(I). 闭路内奇点多，闭路外奇点少；

(II) 闭路内阶数高。

11 月 7 日

<<工程数学>>使我们思想升华

学习《工程数学》究竟为什么？

最重要的一条是，我们所处的世界其规律是定量的，对于工作要解决的问题我们采用工程数学做基础，给出既漂亮又实用的结果，这是学习的主要目的。

但是，应该指出的是很多人常常忽略学习工程数学还能获得非常重要的思想提高。

我们知道：《工程数学》包括数学和工程两个方面，数学是理科，而工程又属工科，于是通过学习将会使我们今后在**处理实际问题中理科思维和工科思维都得到极大的升华。**

理科思维讲究逻辑严密、推理缜密、工作细密。

作为例子，对于时谐电磁场

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kz)$$

可以引入到复域进行研究，即

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\left[\vec{E}_0 e^{j(\omega t - kz)}\right]$$

式中，$\mathrm{Re}[\ ]$表示取括号中的实部。

但是，若要研究二次量（能流）——Poynting 矢量$\vec{S}$，则需要一套严格的数学逻辑：为简单取 z=0。

$$\begin{cases} \vec{E} = \dfrac{1}{2}\left[\vec{E}_0 e^{j\omega t} + \vec{E}_0^* e^{-j\omega t}\right] \\ \vec{H} = \dfrac{1}{2}\left[\vec{H}_0 e^{j\omega t} + \vec{H}_0^* e^{-j\omega t}\right] \end{cases}$$

于是得

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^*\right] + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{E}_0 \times \vec{H}_0 e^{j2\omega t}\right]$$

在一个周期$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$的平均值

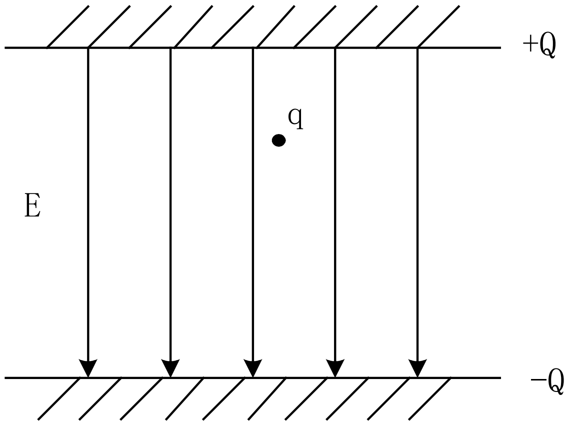
$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T S dt = \mathrm{Re}\left[\vec{S}(\vec{r})\right]$$

式中 $\vec{S}(\vec{r})=\frac{1}{2}(\vec{E}_0\times\vec{H}_0^*)$。

可见，我们所研究的二次量是一个周期内的平均功率流密度，也称复 Poynting 矢量。

另一方面，工科思维则主张一切从实际出发，抓住问题的主要矛盾。

举例来说 2011 年 11 月 1 日地球人口达到 70 亿，它比过去 10 年增加了很多。那么是否会改变地球的运动规律呢？（从工科上）认为是不变的，因为人口与地球本身重量相比微乎其微。



平板电容器

再举一个电学例子：平板电容器带电 Q，内部有一电荷 q，一般认为 $Q>>q$。这种情况下电场 $\vec{E}$ 与电荷 q 之间相互做功，但我们认为电场能量密度 $\omega=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ 不变——这也是典型的工科思维。

可见，学习了《工程数学》，使我们在思想上获得了极大地升华。