10

留数定理（I）

复变函数论研究的一个显著特点是将复积分和复级数联系起来，并且用级数展开被积函数——从而揭示奇点的本质

Taylor 级数

圆内解析展开

Laurent 级数

环域解析展开

Taylor 级数 和 Laurent 级数.

圆内展开 $|z-z_0|<r_2$

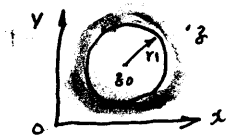
将圆内解析函数 $f(z)$ 展开

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

$$c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$$

圆外展开 $|z-z_0|>r_1$

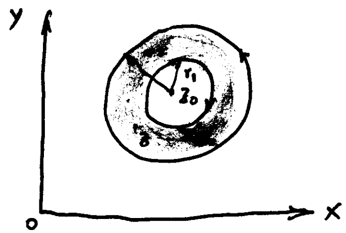
将圆外解析函数 $f(z)$ 展开



$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}$$

环域展开 $r_1<|z-z_0|<r_2$ 将环内解析函数 $f(z)$ 展开成 Laurent 级数



$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}$$

一. 孤立奇点

奇点是复变函数可能贡献的根源，很有必要作深入研究.

【定义】 若 $f(z)$ 虽不在 z_0 解析，但是在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内处处解析，这样的点 z_0 称为是 $f(z)$ 的孤立奇点.

奇点分类

	可去奇点	极点	本性奇点
定义	Laurent级数中不含负次幂 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ $=c_0+c_1(z-z_0)\cdots$ $f(z_0)=c_0$	Laurent级数中含有限项负次幂 $f(z)=\sum_{n=-m}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ $=c_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots$ $+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+c_0$ $+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots$ $m\geq 1$ 称为m阶极点	Laurent级数中含无限项负次幂 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$
范例	$\frac{\sin z}{z}=1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4-\cdots$	$\frac{(z-2)}{(z^2+1)(z-1)}$ $z=1$ 2阶极点 $z=\pm i$ 1阶极点	$e^{\frac{1}{z}}=1+z^{-1}+\frac{1}{2!}z^{-2}+\cdots$

【例-2】 $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ 在 $z=0$ 为本性奇点

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}z^{-2}+\cdots+\frac{1}{n!}z^{-n}+\cdots$$

本性奇点有一个最重要性质：对于任一给定复数 A.
总可找到 $f(z_0)\to A$.

令 $A=re^{i\theta}$， $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$

可以令 $\frac{1}{z}=\ln A=\ln r+i\theta$

于是有 $z=\frac{1}{\ln r+i\theta}$

作为例子，取 $A=i$， $\ln r=0$

$$\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

$$z_k=\frac{1}{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)},\quad k=0,1,2,\cdots$$

因为 $n\to\infty$ $f(z_n)\to i$. 换句话说，本性奇点的极限是不确定的.

二、复函数的0点与极点

复函数中0点与极点是一对矛盾.

$\boxed{\text{零点}} \leftrightarrow \boxed{\text{极点}}$

【m级0点定义】若函数$f(z)$可表示为

$$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$$

且$\varphi(z)$在z_0处解析, $\varphi(z_0)\neq 0$, 则z_0称为$f(z)$的m级0点.

【定理1】若$f(z)$是z_0处的解析函数, 则$f(z)$的m级0点充要条件为

$$\begin{cases} f^{(n)}(z_0)=0 & (n=0,1,\cdots m-1) \\ f^{(m)}(z_0)\neq 0 \end{cases}$$

【证明】这里只给出必要性.

【证明】$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n=c_0+c_1(z-z_0)+\cdots$

于是有 $\varphi(z_0)=c_0\neq 0$ 则一般来说$f(z)$为

$$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)=c_0(z-z_0)^m+c_1(z-z_0)^{m+1}+\cdots$$

这说明$f(z)$的Taylor级数前m项展开系数为0, 而我们已知

$$c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)=0 \quad (n=0,1,\cdots,m-1)$$

是Taylor的展开系数.

【定理2】若z_0是$f(z)$的m阶极点, 则z_0必为$\frac{1}{f(z)}$的m阶0点.

【证明】设z_0是$f(z)$的m阶极点

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}g(z)$$

其中, $g(z)$在z_0处解析, 且$g(z_0)\neq 0$. 所以对

$z\neq z_0$时必有

$$\frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m\frac{1}{g(z)}=(z-z_0)^m h(z)$$

且 $h(z)=\frac{1}{g(z)}$ 也在z_0处解析，且

$$h(z_0)=\frac{1}{g(z_0)}\neq 0$$ 由定义即知，

z_0是$\frac{1}{f(z)}$的m阶0点。■

【例-2】试求出 $\frac{1}{\sin z}$ 的极点性质

【解】由【定理2】，我们只需研究

$\sin z$的0点特性

把求极点的问题 $\xrightarrow{\text{转化为}}$ 求0点的问题

$\sin z\big|_{k\pi}=0$，且 $\sin' z\big|_{z=k\pi}\neq 0$

可见，$z=k\pi$是$\sin z$的一阶0点；

于是 $z=k\pi$是 $1/\sin z$的一阶极点。

三、复函数在无穷远处的性态

Note：无穷远处的性态实质上是一种规定

令 $t=\frac{1}{z}$

若$t=0$ 是$\varphi(t)=f(\frac{1}{t})=f(z)$的可去奇点，m阶极点或本性奇点，则我们规定 $z=\infty$ 即$f(z)$的可去奇点，m阶极点或本性奇点

把∞处的问题 $\xrightarrow{\text{转化为}}$ 0点（即原点）的问题

特别Note下列区别

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin(\frac{1}{z}) \longleftrightarrow f(\frac{1}{z}) \\ \text{自变量}\infty\text{这处与原点处对应;} \\ \frac{1}{\sin z} \longleftrightarrow \frac{1}{f(z)} \\ \text{因变量极点与0点的对应.} \end{array}}$$

【例-3】研究 $f(z)=\frac{z}{z+1}$ 在 $z=\infty$ 处的性质.

【解】 $f(z)=\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=\frac{1}{1+t}=1-t+t^2\cdots$

$\lim \varphi(t)=1$ 为 $t=0$ 的可去奇点, 也即 $z\to\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

四 留数定理

【定义】设 z_0 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点, 令

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz = Res[f(z), z_0]$$

表示在 z_0 处的留数. 其中 c 是包含 z_0 点的正向曲线.

把 $f(z)$ 展成环内 Laurent 级数.

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

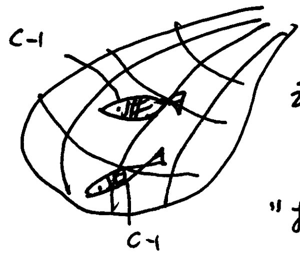
可见

$$\boxed{Res[f(z), z_0]=c_{-1}}$$

【评注】留数定理是复变函数论中最重要的积分定理.

留数定理——就是"抓鱼"定理.

留数就是"鱼"。环积分就是"网".



$\frac{1}{2\pi i}\oint_c f(z)dz$

"抓鱼"定理.

特别Note下列区别

$\sin\left(\frac{1}{z}\right) \longleftrightarrow f\left(\frac{1}{z}\right)$

自变为∞远处与原点处对应;

$\frac{1}{\sin z} \longleftrightarrow \frac{1}{f(z)}$

因变为极点与0点的对应.

【例-3】研究 $f(z)=\frac{z}{z+1}$ 在 $z=\infty$ 处的性态.

【解】 $f(z)=\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-\cdots$

$\lim \varphi(t)=1$ 为 $t=0$ 的可去奇点，也即 $z\to\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

四 留数定理

【定义】 设 z_0 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点，令

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_c f(z)\,dz = \mathrm{Res}[f(z), z_0]$$

表示在 z_0 处的留数. 其中 c 是包含 z_0 点的正向曲线.

把 $f(z)$ 展成环内 Laurent 级数.

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$$

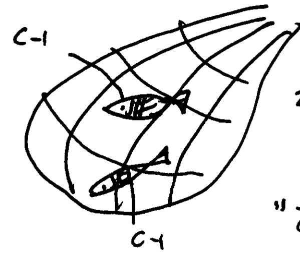
可见

$$\boxed{\mathrm{Res}[f(z), z_0]=C_{-1}}$$

【评注】 留数定理是复变函数论中最重要的积分定理.

留数定理——就是"抓鱼"定理.

留数就是"鱼"。环积分就是"网".



$\frac{1}{2\pi i}\oint_c f(z)\,dz$

"抓鱼"定理.

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\oint_C (z-z_0)^n dz$$

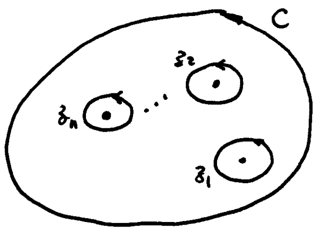
→ 记得一个重要积分 $\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}=\begin{cases}2\pi i & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$

$z_0\in D$（z_0包含在积分路径C内）

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=C_{-1}$$

【留数定理1】设$f(z)$是域D内除有限个奇点$z_1,z_2,\cdots,z_n$之外处处解析．C是D内包含诸奇点的一条正向简单曲线，则

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$$



留数定理1

【证明】利用复合闭路积分

$$\oint_C f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k}f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$$ ■

下面讨论计算留数的几个规则．

规则I	若z_0是$f(z)$的1阶极点，则有 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$

我们已经知道，1阶极点一般可表示为

$$f(z)=C_{-1}(z-z_0)^{-1}+C_0+C_1(z-z_0)+\cdots$$

于是有

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=C_{-1}=\mathrm{Res}[f(z),z_0]$$ ■

规则II	若z_0是$f(z)$的m阶极点，则 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}}\{(z-z_0)^m f(z)\}$．

解法I. $f(z)=\dfrac{ze^{z}}{z^{2}-1}$ 有二个1阶极点,

分别为 ±1. 均在 C 内. 于是

$$\oint_C \frac{ze^{z}}{z^{2}-1}\,dz = 2\pi i\left\{\mathrm{Res}[f(z),1]+\mathrm{Res}[f(z),-1]\right\}$$

由规则I

$$\mathrm{Res}[f(z),1] = \lim_{z\to1}(z-1)\frac{ze^{z}}{z^{2}-1} = \lim_{z\to1}\frac{ze^{z}}{z+1} = \frac{1}{2}e$$

$$\mathrm{Res}[f(z),-1] = \lim_{z\to-1}(z+1)\frac{ze^{z}}{z^{2}-1} = \lim_{z\to-1}\frac{ze^{z}}{z-1} = \frac{1}{2}e^{-1}$$

最后得

$$\oint_C \frac{ze^{z}}{z^{2}-1}\,dz = 2\pi i\left\{\frac{1}{2}(e+e^{-1})\right\} = 2\pi i\,\mathrm{ch}(1).$$

解法II 利用规则III

$$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$$ 其中

$$\begin{cases} P(z)=ze^{z} \\ Q(z)=z^{2}-1 \end{cases}$$

$$Q'(z)=2z$$

于是有

$$\mathrm{Res}[f(z),1] = \left.\frac{ze^{z}}{2z}\right|_{z=1} = \frac{1}{2}e$$

$$\mathrm{Res}[f(z),-1] = \left.\frac{ze^{z}}{2z}\right|_{z=-1} = \frac{1}{2}e^{-1}$$

再次得到

$$\oint_C \frac{ze^{z}}{z^{2}-1}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{ch}(1)$$

完全同样的结果. ■

10 月 27 日

形式与内容

一般认为形式是外在的，而内容则是根本的。但是，偶尔找到一种好的形式往往能把最重要的本质反映得一清二楚。

复变函数中的解析函数是它的一部重头戏。解析函数简言之就是可微可导的复函数。

它有充分必要条件——Cauchy-Riemann 条件和必要条件不包含 $\bar{z}$。

解析函数	
充分必要条件	$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$
必要条件	$\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}}=0$

值得指出：我们找到一种好的形式——复算子

$$\mathbb{W} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$$

$$w=u+iv$$

可以把解析函数条件统一归纳为

$$\mathbb{W}w=0$$

1、它包含了 Cauchy-Riemann 条件

$$\mathbb{W}w=(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y})\left(u+iv\right)=(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial v}{\partial y})+i\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0$$

2、它包含了必要条件

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}) \\ iy=\frac{1}{2}(z-\bar{z}) \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\mathbb{W}w$$

$$\mathbb{W}w=\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=0$$

可见，一种好的形式确实可以反映出事物的深层次本质。