5

复算子 四

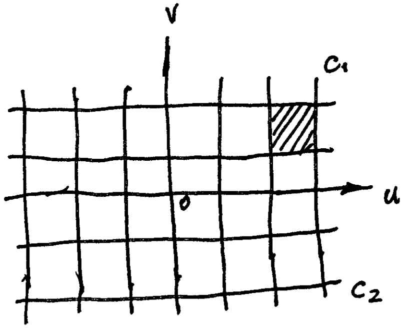
我们在讲述复算子前，先复习 Review 两个重要概念.

1. 简单性的保角映射.

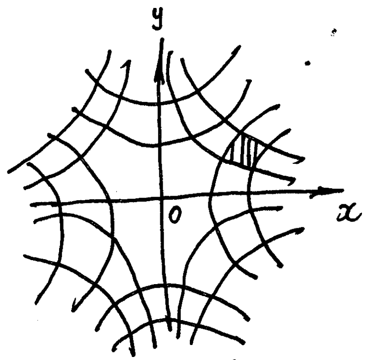
作个例子，$\omega = z^2$

实部 $u = x^2 - y^2 = c_1$

虚部 $v = 2xy = c_2$



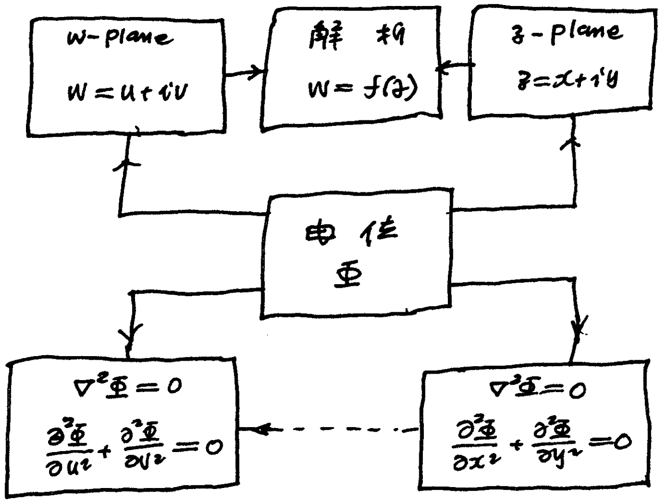
w-plane



z-plane

不变性的保角映射

电位Φ的物理性质——在z面和w面保持不变，只要 f(z) 解析



在 z-plane 复杂难求的物理量，可以统一归化为 w-plane 的相同物理量.

这便是保角映射应用的真正灵魂.

2. 平面矢量的复数对应.

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} \leftrightarrow A = A_x + iA_y$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} \leftrightarrow B = B_x + iB_y$$

$$\boxed{\bar{A}B = (\vec{A}\cdot\vec{B}) + i\{\vec{A}\times\vec{B}\}}$$

Note到 $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y$

$$\{\vec{A}\times\vec{B}\} = A_xB_y - A_yB_x$$

$$\bar{A}B = (A_x - iA_y)(B_x + iB_y)$$

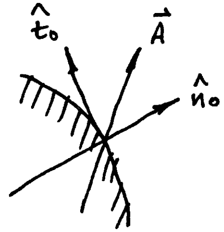
$$= (A_xB_x + A_yB_y) + i(A_xB_y - A_yB_x)$$

于是，复数乘法的实部对应矢量点积，虚部对应矢量叉积(反计方向).

$$\boxed{\mathrm{Re}(\bar{A}B) = (\vec{A}\cdot\vec{B})}$$

Case 1 流量(通量) N

$$N = \int_C \vec{A}\cdot\hat{n}_0\,dt = \mathrm{Re}\int_C \bar{A}\,n_0\,dt$$



n_0 — 单位法向复数

t_0 — 单位切向复量

$$t_0\,dt = dx + i\,dy.$$

显然 $n_0 dt$ 一定是 $t_0 dt$ 的(顺时针)方向旋转 90° 所得，有

$$n_0\,dt = -i\,t_0\,dt = -i(dx + i\,dy)$$

$$= dy - i\,dx$$

$$\mathrm{Re}(\bar{A}n_0\,dt) = \mathrm{Re}\,(A_x - iA_y)(dy - i\,dx)$$

$$= A_x\,dy - A_y\,dx$$

$$\boxed{N = \int_C A_x\,dy - A_y\,dx}$$

根据二维 Gauss Theorem.

$$\oint_c \vec{A}\cdot\hat{n}_0\,dt = \iint_s \nabla\cdot\vec{A}\,ds$$

对于无源场 $\nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} = 0$

$-A_y dx + A_x dy$ 一定是某一函数的全微分，

引入 $v(x,y)$ 称为流函数．当

$$V(x,y) = c$$

时有 $dV = -A_y dx + A_x dy = 0$

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial x} = -A_y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = A_x}$$

Case 2 环量 Γ

$$\Gamma = \int_c \vec{A}\cdot\hat{t}_0\,dt = \mathrm{Re}\int_c \bar{A}\,t_0\,dt$$

$$\bar{A}\,t_0\,dt = (A_x - iA_y)(dx + i\,dy)$$

二维 Stokes Theorem

$$\oint_c \vec{A}\cdot\hat{t}_0\,dt = \iint_s (\nabla\times\vec{A})\cdot\hat{k}\,ds$$

且給出

$$\boxed{\Gamma = \int_c A_x dx + A_y dy}$$

若 $\nabla\times\vec{A} = 0$ 无旋场， $A_x dx + A_y dy$

一定是某一函数的全微分．引入 $u(x,y)$ 称

为位函数．

$$du = A_x dx + A_y dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

即无源，无旋场满足 Cauchy-Riemann

条件．

实践中两个真理之间的最短路径是通过复域.　　—— Jacques Hadamard

一. 算子对应.

在二维矢量理论中, 已经知道

$$\begin{cases} \nabla = \hat{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\dfrac{\partial}{\partial y} \\ \vec{W} = u\hat{i} + v\hat{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{W} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \nabla\times\vec{W} = \left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{k} \end{cases}$$

现在, 我们引入一种全新的复算子

$$\nabla\!\!\!\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{两重性复和算子}$$

$$W = u + iV \quad \text{复函数}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \bar{A}B \leftrightarrow & A \leftrightarrow \nabla\!\!\!\nabla \\ & B \leftrightarrow W \end{array}}$$

$$\overline{\nabla\!\!\!\nabla}W = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iV)$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \bar{A}B = (\vec{A}\cdot\vec{B}) + i\{\vec{A}\times\vec{B}\} \\ \overline{\nabla\!\!\!\nabla}W = (\nabla\cdot\vec{W}) + i\{\nabla\times\vec{W}\} \end{array}}$$

十分明显, $\nabla\!\!\!\nabla$的引入把散度和旋度统一于一个整体.

另一方面, 对偶考虑

$$\nabla\!\!\!\nabla W = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iV)$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

很清楚, $\nabla\!\!\!\nabla W = 0$ 即 Cauchy-Riemann 条件

$$\boxed{\nabla W = 0}$$

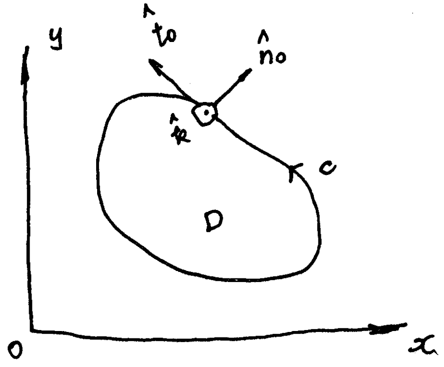
它等价于 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

——四与坐标(柱,球)无关.

三. 对应积分定理

二维域 D 和正向路线 C, 有 $\hat{t}_0$, $\hat{n}_0$

和 $\hat{k}$



z-plane

$$\hat{n}_0 = \hat{t}_0 \times \hat{k}$$

二维 Gauss Theorem
$\oint_C \vec{W}\cdot\hat{n}_0\, d\ell = \iint_D \nabla\cdot\vec{W}\, ds$ $\oint_C u\,dy - v\,dx = \iint_D \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy$
二维 Stokes Theorem
$\oint_C \vec{W}\cdot\hat{t}_0\, dt = \iint_D \nabla\times\vec{W}\cdot\hat{k}\, ds$ $\oint_C u\,dx + v\,dy = \iint_D \left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy$

我们很容易导出复算子积分定理

$$\boxed{\iint_D \overline{\nabla} w\, dx\,dy = i \oint_C w\, d\bar{z}}$$

左边的实部 $(\nabla\cdot\vec{w})$，虚部 $\{\nabla\times\vec{w}\}$.

右边 $i\oint_C w\,d\bar{z} = \oint_C i(u+iv)(dx-i\,dy)$

$$= \oint_C -v\,dx+u\,dy + i\oint_C u\,dx+v\,dy$$

于是实部是Gauss定理，虚部是Stokes定理.

复算子把两个著名定理结合在一起.

我们还可以得到对偶复算子定理

$$\boxed{\iint_D \nabla w\, dx\,dy = -i \oint_C w\, dz}$$

Note：上式是复算子，w不变号.

特别当w是解析函数时

$$\nabla w \equiv 0$$

有

$$\boxed{\oint_C w\, dz = 0}$$

此即著名的 Cauchy-Goursat 定理.

它表明解析函数的环积分为0根源在于复算子 $\nabla w = 0$，此即 Cauchy-Riemann条件.

三 对应复偏导数

已知 $x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$，$y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$

W 表示为 $W=f(z,\bar{z})$ 可给出.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z}=\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial z}+\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}-i\dfrac{\partial}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}=\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \bar{z}}+\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \bar{z}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}+i\dfrac{\partial}{\partial y}\right) \end{cases}$$

这样，算子又和偏导数联系起来

$$\begin{cases} \nabla=2\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ \bar{\nabla}=2\dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

Laplace 算子

$$\nabla^2=\bar{\nabla}\nabla=4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

特别情况解析函数W时，不含 $\bar{z}$，则

$$\nabla^2\to 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial z}=\frac{dW}{dz}=f'(z)$$

$$f'(z)=\frac{1}{2}\left\{(\nabla\cdot\vec{W})+i\{\nabla\times\vec{W}\}\right\}.$$

10 月 10 日

存在性矛盾和构建性矛盾

毛泽东的矛盾分析学问，确实是一门伟大的学问。在延安窑洞里写下了深比大海浪，浅使农民懂的《矛盾论》、《实践论》和《论持久战》，并最终指挥了百万雄师，打败了不可一世的蒋介石。其中的奥秘非常值得我们每一个人探索和学习。

如果从自然科学角度考察，可以发现也可归结为两类矛盾：存在性矛盾和构建性矛盾。

存在性矛盾：例如黑与白、强与弱……，这类矛盾主要是认识问题、分析问题还有揭示问题。

另外一类构建性矛盾，如果用通俗甚至露骨的语言就是——“制造矛盾”。

来了笛卡尔，他把几何图形放到坐标系里“制造”出一对矛盾。于是几何图形和数联系了起来；于是，代数和几何发生了革命的结合，构建性矛盾产生新学问——解析几何。

又来了一个 Einstein，他把 Space 的 x，y，z 和 Time 的 t 放在一起，又“制造”出另一对矛盾，时空结合。

Minkovski 更进一步构建出具体的 4 维复矩阵 $\left[x,y,z,ict\right]^T$。特别值得一提的是，他创新性地用 ic **虚光速**把 x，y，z 和 t 结合起来，构成 4 维复空间。

“制造”矛盾的关键在于思想，在于第 1 步，一旦迈出第 1 步，下边将是自然而然的发展。

谈到执教《复变函数》，我们不得不由衷地佩服 Gauss，他以天才的敏感“制造”出实部和虚部这一对矛盾共居复数 z 和 w 之中

$$z = x + iy\,,\quad w = u + iv$$

最重要的解析函数实部和虚部有 Cauchy-Riemann 条件

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{解析函数}\\ w = u + iv\end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Cauchy-Riemann条件}\\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y},\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{array}}$$

此外，通过实部和虚部把复数和矢量联系了起来。

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} \leftrightarrow A = A_x + iA_y$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} \leftrightarrow B = B_x + iB_y$$

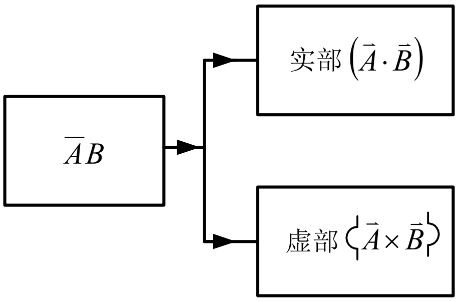
$$\begin{gathered} w = u + iv \\ z = x + iy \end{gathered}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{解析函数}\\ f\left(z\right) = u + iv\end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Cauchy-Riemann条件}\\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y},\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{array}}$$

通过实部和虚部把复数和矢量联系了起来

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} \leftrightarrow A = A_x + iA_y$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} \leftrightarrow B = B_x + iB_y$$



必须提出：上述思想是美国著名数学家 G.Polya 首先提出的，其中 $\overline{A}$ 表示 A 的共轭。

进一步，我们很自然地“制造”出复算子。

二维矢量实算子	复算子
$\nabla = \hat{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\dfrac{\partial}{\partial y}$	$\nabla\!\!\!\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}$

$$\overline{\nabla\!\!\!\nabla} w = \left(\nabla\cdot\vec{w}\right) + i\left\{\nabla\times\vec{w}\right\}$$

其中 $\nabla\cdot\vec{w} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right)$

$$\nabla\times\vec{w} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{k}$$

$\nabla\!\!\!\nabla$ 表示实部散度算子 $\nabla\cdot$ 和虚部旋度算子 $\nabla\times$。

可能有人会反诘——构建性矛盾也是客观存在的，只是隐藏得比较深，并不是“制造”出来的，这应该是另外一门应该研究的学问。

无论如何，我们一定要学好、发现并研究这个课题。