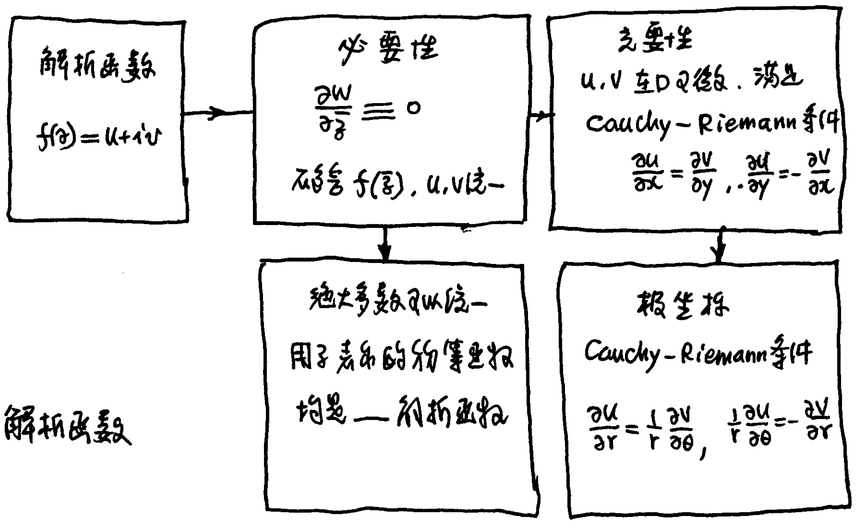
4

解析函数（II）

从研究复可微函数开始，我们引出了一类最重要的复变函数——解析函数，它的实部和虚部有着密切的关系 Cauchy-Riemann条件，u,v成对——称为共轭函数.



解析函数

本节，我们将从分析方面，几何方面和物理方面，研究解析函数及其应用.

一、分析上，解析函数是调和函数.

对于二维情况

$$\nabla^2=\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

满足 $$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (1)$$

称u为调和函数（Harmonic Function）

在复变函数中 $w=u+iv$ 中解析函数

u和v均为调和函数.

【证明】 先对Cauchy-Riemann第1条件

对x求导，有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}$$

—和第2条件对y求导

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

计及混合导数的次序可交换性，可知

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

—类似地，又写出

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

■

【例-1】 已知解析函数 $f(z) = u + iv$

其中 $v = 2xy$，求 $u(x,y)$

【解】

> Note 解析函数已知全部可
>
> 求出虚部，反之亦然.

$$u(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

$$= \int \frac{\partial v}{\partial y} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy .$$

由已知条件 $-\frac{\partial v}{\partial x} = -2y$，$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x$，可知

$$u(x,y) = \int 2x\,dx - 2y\,dy = x^2 - y^2 + c$$

$$f(z) = (x^2 - y^2) + i2xy + c = (x+iy)^2 + c$$

$$= z^2 + c$$

$$\boxed{\begin{aligned} u(x,y) &= \int_{z_0}^{z} \frac{\partial v}{\partial y} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy + c \\ v(x,y) &= \int_{z_0}^{z} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + c \end{aligned}}$$

【例-2】 已知解析函数 $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$

$= 2\ln|z|$. 求在 $0<|z|<\infty$ 内的 $v(x,y)$

$$v=\int_{z_0}^{z}\frac{\partial v}{\partial r}dr+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}r\,d\theta+C$$

$$=\int_{z_0}^{z}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}dr+\frac{\partial u}{\partial r}r\,d\theta+C$$

已知 $\frac{\partial u}{\partial\theta}=0$, $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{2}{r}$

$$v=2\theta+C=2\,\mathrm{Arg}\,z+C$$

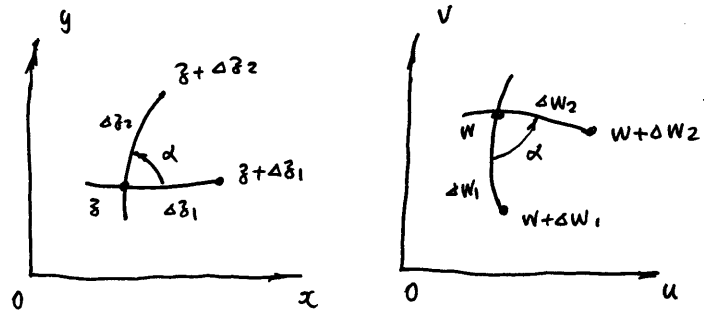
$$f(z)=u+iv=2\ln|z|+i\,\mathrm{Arg}\,z+iC$$

$$=2\,\mathrm{Ln}\,z+C'$$

二. 几何上，解析函数满足保角映射

让我们研究 z-plane 上三个点: z, $z+\Delta z_1$, $z+\Delta z_2$

和 w-plane 对应的三个点: w, $w+\Delta w_1$, $w+\Delta w_2$



z-plane　　　　w-plane

保角映射

利用函数形式给出其关系

$w=f(z)$, $w+\Delta w_1=f(z+\Delta z_1)$, $w+\Delta w_2=f(z+\Delta z_2)$

令 $\Delta z_1\to 0$, $\Delta z_2\to 0$ 对于解析函数与 Δz 趋于0方式无关，也即

$$\lim_{\Delta z_1\to 0}\frac{\Delta w_1}{\Delta z_1}=\lim_{\Delta z_2\to 0}\frac{\Delta w_2}{\Delta z_1}=f'(z)$$

若限制 $f'(z)\neq 0$，则得

$$\lim_{\substack{\Delta z_1\to 0\\ \Delta z_2\to 0}}\frac{\Delta z_2}{\Delta z_1}=\frac{\Delta w_2}{\Delta w_1}$$

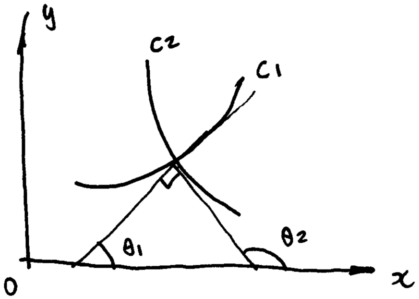
它等价于

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\Delta z_2}{\Delta z_1}\right| = \left|\dfrac{\Delta w_2}{\Delta w_1}\right| \\ \arg\left(\dfrac{\Delta z_2}{\Delta z_1}\right) = \arg\left(\dfrac{\Delta w_2}{\Delta w_1}\right) \end{cases} \qquad (2)$$

这表明：解析函数满足保角映射，映射前后微分三角形相似，即 α.

【引理】 曲线 C_1 和 C_2 正交条件是

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)\Bigg|_{C_1}\left(\frac{dy}{dx}\right)\Bigg|_{C_2}=-1 \qquad (3)$$



C_1 和 C_2 曲线正交

【证明】 如图所示

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{C_1}=\tan\theta_1 , \quad \frac{dy}{dx}\Big|_{C_2}=\tan\theta_2$$

正交有 $\theta_2=90^\circ+\theta_1$ 于是有 $\frac{dy}{dx}\Big|_{C_2}=-\operatorname{ctan}\theta_1$

也即 $\frac{dy}{dx}\Big|_{C_1}\frac{dy}{dx}\Big|_{C_2}=-1$ ■

【定理】 已知 $f(z)=u+iv$ 为解析函数，且 $f'(z)\neq 0$，则曲线簇 $u(x,y)=c_1$ 和 $v(x,y)=c_2$ 对应 z 平面曲线必正交

【证明】 设 C_1 和 C_2 在 z 平面对应 (x,y).

$u(x,y)=c_1$ 有

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=0 \quad \text{写为}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{u=c_1}=-\left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}\right)_{(x,y)}$$

同样

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{v=c_2} = -\left(\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}}\right)_{(x,y)}$$

由 Cauchy-Riemann条件可知

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{u=c_1}\left(\frac{dy}{dx}\right)_{v=c_2} = -1$$ ∎

三、物理上，解析函数表示无源

无旋矢量场

这里采用复数 ←→ 矢量对应方法

$$\boxed{\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j} \longleftrightarrow A=A_x+iA_y}$$

讨论矢量场中最重要两个量：流通和旋量.

1. 流量（通量）N

$$N=\int_c \vec{A}\cdot\hat{n}_0\,dt = \mathrm{Re}\int_c \bar{A}\,n_0\,dt$$

上式右边表示复对应．n_0 — 单位法向矢量；

t_0 表示单位切向矢量．

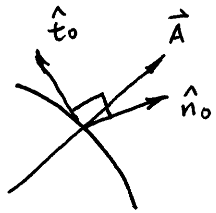
$$\bar{A}=A_x-iA_y \quad \text{—— 表示复共轭}$$

$$t_0\,dt = dx+i\,dy$$

而 n_0dt — 它是 t_0dt 逆向（顺时针）旋转 90°

所得

$$n_0dt=-i\,t_0dt=-i(dx+i\,dy)=dy-i\,dx$$



$\hat{t}_0$ 与 $\hat{n}_0$ 关系示意

又，我们已经知道：两个矢量的点积等于共轭复量乘积的实部，有

$$\mathrm{Re}\,(\bar{A} n_0 dt) = \mathrm{Re}\,(A_x - iA_y)(dy - i\,dx)$$

$$= A_x dy - A_y dx$$

最后得到流量 N

$$\boxed{N = \int_C A_x dy - A_y dx}$$

如果是闭合曲线

三维 Gauss Theorem

$$\oiint_S \vec{A}\cdot\hat{n}\, ds = \iiint_V \nabla\cdot\vec{A}\, dV$$

二维 Gauss Theorem

$$\oint_C \vec{A}\cdot\hat{n}_0\, dt = \iint_S \nabla\cdot\vec{A}\, ds$$

我们定义 $\nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} = 0$ 称为无源场.

这种情况下 $-A_y dx + A_x dy$ 必定是某一函数的全微分.

今引入流函数 $v(x,y)$, 当 $v(x,y)=C$ 有

$$dv(x,y) = -A_y dx + A_x dy = 0$$

则等值线方程是

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A_y}{A_x} \qquad (4)$$

另一方面, 无源场的全微分条件为

$$dv(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy$$

即

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial x} = -A_y\,, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = A_x}$$

2. 旋量 Γ

旋量 Γ 定义为

$$\Gamma = \int_C \vec{A} \cdot \hat{t}^{\circ}\, dt = \mathrm{Re} \int_C \bar{A}\, t^{\circ}\, dt$$

$$\bar{A}\, t^{\circ}\, dt = (A_x - iA_y)(dx + i\,dy)$$

$$\Gamma = \int_C A_x\, dx + A_y\, dy$$

如果把 $\vec{A}$ 表示为力场，则 Γ 表示沿 C 方向力所做的功

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Stokes Theorem} \\ \oint_C \vec{A} \cdot \hat{t}_0\, dt = \left\{ \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot ds \right\}\end{array}}$$

{ } 符号表示不计方向，若 $\nabla \times \vec{A} = \vec{0}$ 则为无旋场，这时 $A_x\, dx + A_y\, dy$ 必是某一函数的全微分，引出位函数 $u(x, y)$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

给出

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = A_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = A_y}$$

3. 解析函数

根据无源场引出流函数 $V(x, y)$

根据无旋场引出位函数 $u(x, y)$

现让我们结合在一起，构造 $f(z)$

$$f(z) = u + iV.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = A_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} = A_y$$

于是，无源场和无旋场构成解析函数.

$$N=\int_{z_1}^{z_2} -A_y\,dx + A_x\,dy = \int_{z_1}^{z_2} dV = V(z_2)-V(z_1)$$

$$\Gamma=\int_{z_1}^{z_2} A_x\,dx + A_y\,dy = \int_{z_1}^{z_2} dU = U(z_2)-U(z_1)$$

Note：我们发现解析函数的实部或虚部积分与曲线形状无关.

四、复位及其应用

作为物理应用，我们把 Γ 和 N 结合构成复位.

把场矢量 $\vec{A}$ —— 对应复量 A

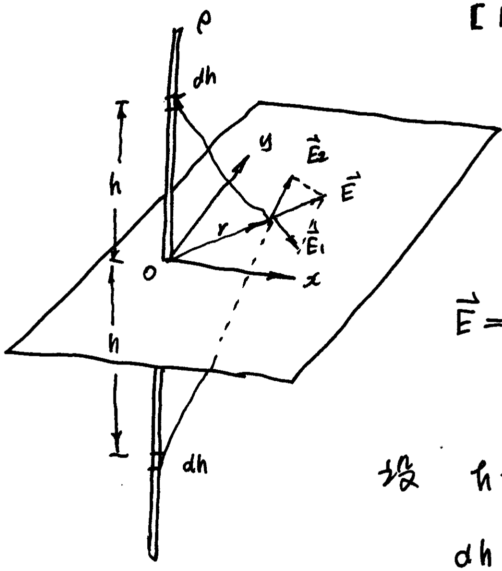
$$A = A_x + iA_y = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x} = \overline{f'(z)}$$

具体对于静电场 $\vec{E} = -\nabla u$

$$E = -\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -\overline{f'(z)}$$

【例-3】无限长线密度为 ρ 的带电导线，其静电场 $\vec{E}$ 所对应的复位 $f(z)=u+iv$，求出电位.



【解】考虑到对称性

z段合并取消z分量

而只剩下 $\hat{r}$ 分量

$$\vec{E} = \hat{r}_0 \frac{\rho}{4\pi\varepsilon}\int_0^{\infty} \frac{2r}{r^2+h^2}\frac{dh}{\sqrt{r^2+h^2}}$$

设 $h = r\,\mathrm{sh}\,\xi$

$dh = r\,\mathrm{ch}\,\xi\, d\xi$

$\sqrt{r^2+h^2} = r\,\mathrm{ch}\,\xi$

$$\vec{E} = \hat{r}_0 \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 r} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{ch^2\xi}$$

$$= \hat{r}_0 \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 r} th\xi \Big|_0^{\infty} = \frac{\rho\vec{r}}{2\pi\epsilon_0 r^2}$$

Note $\vec{E}$ 作复易对应.

$$r^2 = |z|^2 = z\bar{z}$$

$$\vec{r} \to x + iy = z$$

于是，给出电场

$$E = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 \bar{z}}$$

由复位这义可知

$$f'(z) = -\bar{E} = -\frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 z}$$

$$f(z) = u + iv = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} Ln\left(\frac{1}{z}\right) + c$$

最后得到

$$\boxed{u(x,y) = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \ln\frac{1}{|z|}}$$

10 月 8 日

找问题，抓本质

教学上一个重要的目标是教会学生“找问题，抓本质”的本领。

现象是容易被发现的，但是本质却是很难被抓住——本质常常隐藏于现象之背后。

举一个简单例子：力学中万有引力是平方反比定律；而电学中库仑力也是平方反比定律，为什么？

深入研究之后发现这是**有心力在 3 维空间**的典型表现。

因为有心力在 3 维空间可以被任何半径 R 的圆球包住，而圆球的面积是 $4\pi R^2$。

可见，隐藏在这一问题背后的本质是 **3 维空间**。

这次执教复变函数，从一般函数→解析函数的重要关键是复函数导数的**唯一性**，即

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}?$$

这个问题的本质怎么找呢？我们画出如下框图。于是，由 $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}$(即不出现 $\bar{z}$)$=0$，自然出现了 Cauchy-Riemann 条件。并且 $w=u+iv$ 中 u,v 不再独立！

这时，复函数出现了第二座里程碑，并且走上了独立自主的发展的道路。