2 矢量分析

我们先总结一下《矢量》的主要精华.

矢量

公理化：定义，相等，0矢量。代数：可乘，可加

点积，数量作用

$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$

对称作用

$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

叉积，矢量作用

$|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$

反对称作用

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

多重作用

混合积

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

双叉积

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

矢量理论的关键：坐标系＋单位矢.

那么，什么是矢量分析呢？

矢量＋对时间t的微积分 ⟶ 矢量分析.

由此，运动进入了矢量理论.

一. 标量函数和矢量函数

标量函数

$u = u(t)$

矢量函数

$\vec{A}(t) = A_x(t)\hat{i} + A_y(t)\hat{j} + A_z(t)\hat{k}$

十分清楚，一个矢量函数相当于三个独立的标量函数.

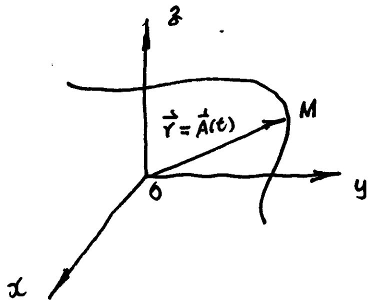
二. 矢端曲线

以坐标O为原点，$\vec{A}(t)$的终点M随t的变曲线之

称之为矢端曲线.

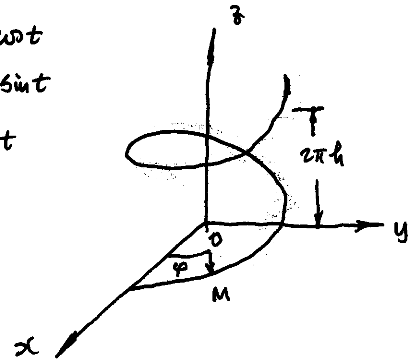
$$\vec{r} = \vec{A}(t) = \overrightarrow{OM} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$x = A_x(t),\quad y = A_y(t),\quad z = A_z(t)$$



矢端曲线正是矢量函数的几何表示.

【例-1】
$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = ht \end{cases}$$



螺旋线

三. 矢量函数导数和微分

1. 导数

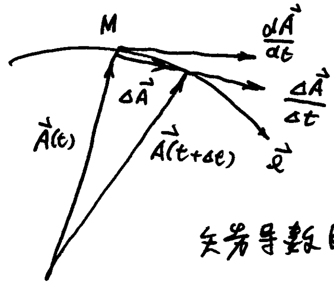
$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{A}(t+\Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{dA_x}{dt}\hat{i} + \frac{dA_y}{dt}\hat{j} + \frac{dA_z}{dt}\hat{k}$$

Note：上述定义意味着

$$\frac{d}{dt}\hat{i} = 0,\quad \frac{d}{dt}\hat{j} = 0,\quad \frac{d}{dt}\hat{k} = 0$$

但对球、柱坐标系并非如此.



矢量导数的几何意义.

方向始终指向 t 增大方向，即 $\vec{e}$ 方向.

可以简写成

$$\vec{A}'(t) = A_x'(t)\hat{i} + A_y'(t)\hat{j} + A_z'(t)\hat{k}$$

【例-2】 已知圆螺旋线

$$\vec{A}(t) = a\cos t\,\hat{i} + a\sin t\,\hat{j} + ht\,\hat{k}$$

求 $\frac{d\vec{A}(t)}{dt}$

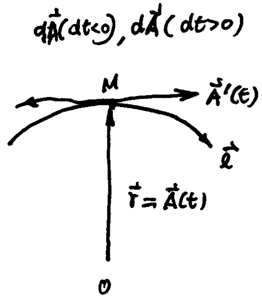
$$\frac{d\vec{A}}{dt} = -a\sin t\,\hat{i} + a\cos t\,\hat{j} + h\,\hat{k}$$

$\vec{A} = \vec{A}(t)$ 在 t 处的微分定义为

$$d\vec{A} = \vec{A}'(t)\,dt$$

$d\vec{A}$ 与 $\vec{A}'(t)$ 方向一致 $(dt>0)$

$d\vec{A}$ 与 $\vec{A}'(t)$ 方向相反 $(dt<0)$



矢量导数性质

(1). $\frac{d}{dt}\vec{C} \equiv 0$ （$\vec{C}$为常矢）

(2). $\frac{d}{dt}(\vec{A}\pm\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \pm \frac{d\vec{B}}{dt}$

(3). $\frac{d}{dt}(k\vec{A}) = k\frac{d\vec{A}}{dt}$ （k为常数）

(4). $\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt}$

(5). $\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}$

(6). 对于复合函数

$$\vec{A} = \vec{A}[u(t)]$$

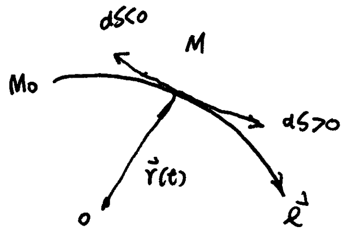
$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt}\,\frac{du}{dt}$$

【例-3】研究矢径微分 $d\vec{r}$ 和弧长微分 ds

【解】 $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

于是，矢径微分有 $d\vec{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$

对应模 $|d\vec{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$



$$ds = \pm\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

$\vec{l}$ 正向时取+，反向取−。

于是有 $\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$

$\frac{d\vec{r}}{ds}$ 表示正向切向单位矢

$$\hat{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \cos\alpha\,\hat{i} + \cos\beta\,\hat{j} + \cos\gamma\,\hat{k}$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}} \\ \cos\beta = \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}} \\ \cos\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}} \end{cases}$$

【例-4】 $\vec{A}(t)$ 模不变的充要条件是 $\vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt}=0$

(1). $|\vec{A}|^2 = C = \vec{A}\cdot\vec{A}$

即 $2\vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt}\equiv 0$

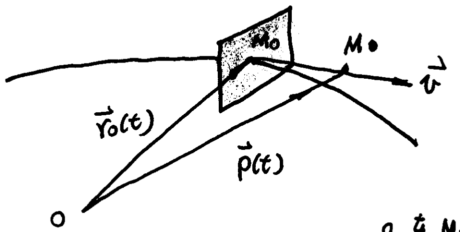
(2) $\vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d|\vec{A}|^2}{dt} = 0$

$|\vec{A}| \equiv C$. ∎

四. 矢量导数应用

1. 矢量导数的几何应用

Case 1 曲线 l 的切线和法平面.



l 在 M_0 处的切线和法平面

已知矢径函数 $\vec{r}=\vec{r}(t)=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\hat{i}+\frac{dy}{dt}\hat{j}+\frac{dz}{dt}\hat{k}$$

特别在 M_0 点，有

$$\vec{r}_0 = x_0\hat{i}+y_0\hat{j}+z_0\hat{k}$$

引入切线上的动点 M 对应

$$\vec{P}=\vec{P}(t)=X\hat{i}+Y\hat{j}+Z\hat{k}$$

切线方程

$$\vec{P}=\vec{r}_0+\lambda\vec{v}_0 \quad (\lambda\text{为常数})$$

$$\begin{cases} X = x_0+\lambda\frac{dx}{dt} \\ Y = y_0+\lambda\frac{dy}{dt} \\ Z = z_0+\lambda\frac{dz}{dt} \end{cases}$$

$$\frac{X-x_0}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}=\frac{Y-y_0}{\left(\frac{dy}{dt}\right)}=\frac{Z-z_0}{\left(\frac{dz}{dt}\right)}$$

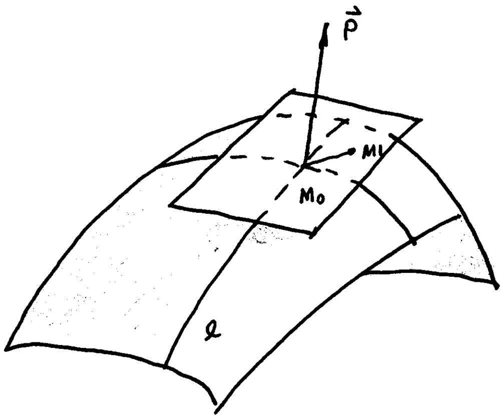
法平面方程

令 $M_1(X_1, Y_1, Z_1)$ 是法平面上的动点

有 $\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{v} = 0$

$$(X_1 - x_0)\frac{dx}{dt} + (Y_1 - y_0)\frac{dy}{dt} + (Z_1 - z_0)\frac{dz}{dt} = 0$$

Case 2 曲面的法线和切平面



曲面在 M_0 处法线和切平面

设曲面方程 $F(x, y, z) = 0$

方程两边对 t 求导，可得

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

已知曲线 l 是经 M_0 的任一曲线

$$l: \begin{cases} x_0 = x(t) \\ y_0 = y(t) \\ z_0 = z(t) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{PM_0} = X\hat{i} + Y\hat{j} + Z\hat{k}$$

曲面的法线方程

$\overrightarrow{M_0P} \parallel \hat{n}$ $P(X, Y, Z)$

$$\frac{X - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

切平面方程

令 M_1 是切平面上任一点 x_1, y_1, z_1

$$(x_1-x_0)\frac{\partial F}{\partial x}+(y_1-y_0)\frac{\partial F}{\partial y}+(z_1-z_0)\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

【例-5】证明圆柱螺线矢量函数切线与z轴的夹角为一定角.

已知 $\vec{r}=\vec{r}(t)=a\cos t\,\hat{i}+a\sin t\,\hat{j}+ht\,\hat{k}$

而 $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ 则表示切线方向，具体有

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=-a\sin t\,\hat{i}+a\cos t\,\hat{j}+h\,\hat{k}$$

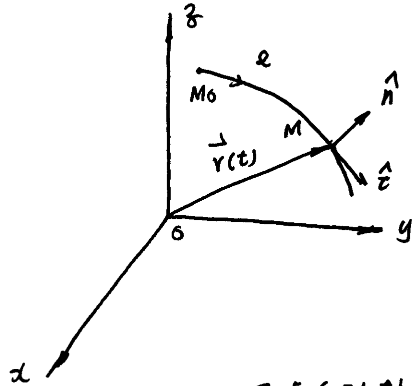
$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|=\sqrt{a^2+h^2}$$ 而和z的夹角为

$$\hat{k}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}=\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|\cos\theta=h$$

于是 $$\cos\theta=\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}$$ 确是一定角

2. 矢量导数的物理应用.

从数学观点来看，Newton力学的主要研究对象是矢量函数 $\vec{r}(t)$



Newton 质点运动轨迹.

速度 $\vec{v}$ 处于切线方向 $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$

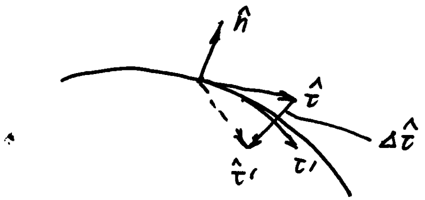
切向单位矢 $\hat{\tau}=\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

加速度 $\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\dfrac{d|\vec{v}|}{dt}\hat{\tau}+|\vec{v}|\dfrac{d\hat{\tau}}{dt}$

Note：$\hat\tau$ 为时间的函数.

$$\frac{d\hat\tau}{dt}\perp\hat\tau$$

$\frac{d\hat\tau}{dt}$ 处于 $-\hat n$ 方向



可见，$\frac{d\hat\tau}{dt}$ 为 $-\hat n$ 方向.

我们引入质点运动轨迹的法向单位矢 $\hat n$

$$\hat n=\frac{-\frac{d\hat\tau}{dt}}{\left|\frac{d\hat\tau}{dt}\right|}$$

定义 s 是曲线 $\vec r$ 从 M_0 点起算的弧长

$$\frac{d\hat\tau}{dt}=\frac{d\hat\tau}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=|\vec v|\frac{d\hat\tau}{ds}$$

上式中 $|\vec v|=\frac{ds}{dt}$，重新写出

$$\hat n=\frac{-\frac{d\hat\tau}{dt}}{|\vec v|\left|\frac{d\hat\tau}{ds}\right|}$$

定义 $\vec r$ 曲线在 M 点曲率半径

$$R=\frac{1}{\left|\frac{d\hat\tau}{ds}\right|}$$

特别当 $\frac{d\hat\tau}{ds}=0$，即曲率半径 $R=\infty$ 时为曲线拐点

$$\boxed{\vec a=\hat\tau\frac{d|\vec v|}{dt}-\hat n\frac{|\vec v|^2}{R}}$$

运动一般可分解为两项加速度：切向加速度和法向加速度，特别当 $\frac{d|\vec v|}{dt}=0$，则有

$$\vec a=-\frac{|\vec v|^2}{R}\hat n$$ 即向心加速度。

五. 矢量函数积分

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{A}(t)dt = \hat{i}\int_{t_1}^{t_2} A_x(t)dt + \hat{j}\int_{t_1}^{t_2} A_y(t)dt$$

$$+ \hat{k}\int_{t_1}^{t_2} A_z(t)dt.$$

Note：这意味着直角坐标单位矢不参与积分，但柱、球坐标系则不如此。

【例-1】 取 $t \in [0, 2\pi]$ 求圆柱螺旋线 l 长度

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = a\cos t\,\hat{i} + a\sin t\,\hat{j} + ht\,\hat{k}.$$

$$l = \int_0^{2\pi} ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt = 2\pi\sqrt{a^2+h^2}.$$

两个典型问题

问题 1 $\vec{A}$ 是已知矢量

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

求过 (x_0, y_0, z_0) 而平行 $\vec{A}$ 的直线方程

$$\frac{X - x_0}{A_x} = \frac{Y - y_0}{A_y} = \frac{Z - z_0}{A_z}$$

问题 2

求过 (x_0, y_0, z_0) 垂直 $\vec{A}$ 的平面方程

$$A_x(X_1 - x_0) + A_y(Y_1 - y_0) + A_z(Z_1 - z_0) = 0$$

8 月 30 日

年青人，请接受我这个老头

如何把教学工作做好？这似乎已经是讨论了千百次的老课题。答案可以百花齐放，如充分准备课、深入浅出、因材施教、典型案例、教学互动等等。

但是，按我的体会，首先，也是最基本的一条是让学生接受你。教学是人与人之间的相互活动。交往谈论中如果学生在思想上不接受老师，那么一切方法都无从谈起。

老年人最大的毛病就是唠叨，自己不了解新事物，三句话不到就提当年。总是现在不如过去。抱着这种态度，再高明的教师都不会获得学生的认可。

年青人，请接受我这老头。

我的态度是放下架子，努力做好。一是诚信。和人打交道首推诚信，待人以诚，做事以信；二是学习。我要向年轻人学习，真正做到相互了解。只要有可能，我甚至想把矢量和“种白菜”联系起来。

年青人，愿意接受我吗！？