电动力学Electrodynamics

第5章 电磁辐射(Radiation)

西安电子科技大学
物理与光电工程学院
白璐
邮箱： blu@xidian.edu.cn
主页： http://web.xidian.edu.cn/bailu
电话： 15291456996

第5章 电磁辐射 (Radiation)

本章内容

§1 电磁场的矢势和标势

§2 推迟势

§1　电磁场的矢势和标势

一、变化的电磁场的矢势和标势

由于磁感应强度是无散场，根据矢量场定理

$$\nabla\cdot\vec{B}=0 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\vec{B}=\nabla\times\vec{A}}$$

$\vec{A}$：矢势（矢量势）

代入电场的旋度方程：

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}[\nabla\times\vec{A}]=0 \quad\Longrightarrow\quad \nabla\times\underbrace{\left[\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right]}_{\text{无旋场}}=0$$

引入标势：$\vec{E}+\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\vec{E}=-\nabla\varphi-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$

φ：标势（标量势）

二、规范变换和规范不变性

在静态场中 ρ与 $\vec{j}$ 是各自独立，所以电场只由 φ 决定，磁场只由 $\vec{A}$ 决定，在时变场中 ρ与 $\vec{j}$之间有连续方程耦合在一起，故 $\vec{A}$和 φ 之间也存在一定的关系，即洛仑兹条件。

洛仑兹规范：
$$\boxed{\nabla\cdot\vec{A}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0}$$

规范：描述相同的 $(\vec{E},\vec{B})$的每一组 $(\vec{A},\varphi)$称为一种规范

规范不变性：当势作规范变换时，所有物理量和物理规律都保持不变，这种不变性称为规范不变性

规范不变性是决定相互作用形式的一条基本原理，传递这些相互作用的场称为规范场，电磁场是一种规范场

三、达朗贝尔方程(d’Alembert)

d’Alembert equation

$$\nabla^2\varphi-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2\vec{A}-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{j}$$

$$\nabla\cdot\vec{A}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

说明：选取洛仑兹规范的好处

1）方程退耦

2）矢势方程与标势方程简单对称

§2 推迟势

要求得矢势和标势，须求解达朗贝尔方程：

$$\begin{cases} \Box^2\varphi \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = -\dfrac{\rho}{\epsilon_0} \\ \Box^2\vec{A} \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = -\mu_0\vec{j} \end{cases}$$

上式可以看作是四维的 **poisson's equation：**

对静态问题，达氏方程退化为泊松方程：$\nabla^2\varphi = -\dfrac{\rho}{\epsilon_0},\ \nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$

方程的解为：$\varphi(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \dfrac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\tau',\quad \vec{A}(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\tau'$

真空中电磁波以c传播，因此观察到的势应该是电荷电流在前一时刻 $t_r = t - |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c$ 产生的

推迟势 $\varphi(\vec{r},t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \dfrac{\rho(\vec{r}\,',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\tau',\qquad \vec{A}(\vec{r},t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\tau'$

d'Alembert equation

$$\Box^2\varphi \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0},$$

$$\Box^2\vec{A} \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$$

的推迟势解：

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}\,',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\tau',$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\tau'$$

其中：

$$t_r = t - |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c.$$

可以证明推迟势 $\vec{A}$ 和 φ 满足洛仑兹条件，而不是场 $\vec{E},\vec{B}$ 推迟。

作业：证明推迟势 $\vec{A}$ 和 φ 满足洛仑兹条件。

➢意义：

1）某一定时刻t的位场 $\vec{A}$和 φ并不是时刻t的源（电荷或电流）所决定的，而是略早的时刻t_r的源（电荷或电流）所决定的。

2）它反映了电磁作用具有一定的传播速度。

3）除电磁作用外，其他一切作用都通过物质以有限速度传播，不存在瞬时的超距作用。